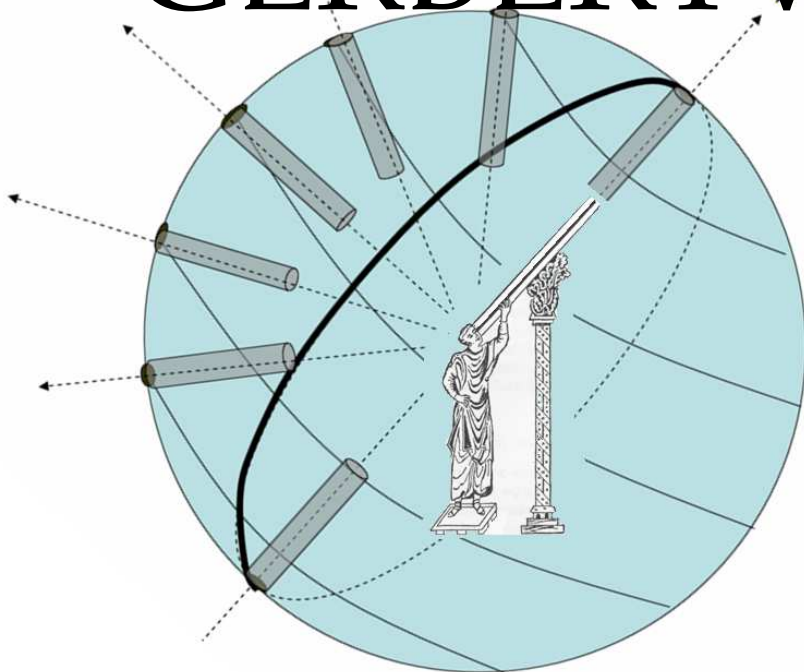


GERBERTVS



<http://www.icra.it/gerbertus>

**International academic online publication
on History of Medieval Science
vol. 4/2013**

GERBERTVS

International academic online publication on History of Medieval Science

url: <http://www.icra.it/gerbertus>

Editorial Board:

Prof. Flavio G. Nuvolone (Université de Fribourg-CH),
Prof. Paolo Rossi (Università di Pisa),
Prof.ssa Laura C. Paladino (Università di Bologna),
Dr.ssa Irene Sigismondi (LUISS e Sapienza Università di Roma)

Publisher: Prof. Costantino Sigismondi

(ICRANet, Ateneo Pontificio Regina Apostolorum e
Observatório Nacional, Rio de Janeiro)
Via Riccardo Grazioli Lante 15/A
00195 Roma, Italia

ISSN 2038-3657 (versione stampata)

ISSN 2038-355X (versione online)

ISSN 2038-3630 (CD-ROM)

Vol. 4 – 2013

Finito di stampare nel maggio 2013

Con il contributo di



O Ábaco de Gerbert

Jorge Nuno Silva¹²⁴
(Universidade de Lisboa)

Resumo

Por volta do ano 1000 um ábaco especial foi descrito por Bernelin, um aluno de Gerbert, o Papa Silvestre II. Quebrando a tradição dos ábacos tradicionais, que usavam peças indistintas, o novo instrumento exhibe os numerais indo-árabes, que se tornarão populares dentro de alguns séculos. Os métodos que tornam a multiplicação e a divisão possíveis são originais e sofisticados. Foram concebidos, tudo indica, pelo próprio Gerbert. A vantagem em computações astronómicas e geométricas também foi enorme.

Abstract

Around the year 1000 a special abacus was described by Bernelin, a student of Gerbert, the Pope Sylvester II. Breaking away from the traditional devices, which use several equal pieces, the new instrument show the indo-arabic numerals that will become popular in a few centuries. The methods that make multiplication and division possible are original and sophisticated. They were conceived, according to the existing evidence, by Gerbert himself. The advantage in geometrical and astronomical computations was also enormous.

Em 967, Gerbert viajou para a Catalunha, onde ficou até 970, acompanhando o Conde de Barcelona.

Nestes três anos teve contacto com a cultura árabe, responsável pela introdução na Europa da notação decimal

¹²⁴ O correio eletrónico do Autor é jnsilva@cal.berkeley.edu

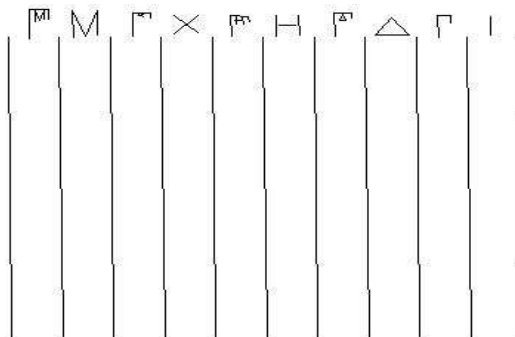
posicional que revolucionou, mais tarde, a vida quotidiana continental. O alcance desse contacto constitui ainda um mistério.

Leonardo de Pisa, Fibonacci, costuma ser referido como o autor de referência na introdução dos numerais indo-árabes na Europa, em virtude do seu livro de 1202, *Liber Abaci*. Contudo, veremos abaixo que Gerbert o precedeu por dois séculos. Se bem que a obra de Leonardo tenha tido enorme divulgação e influência, e se bem que o entendimento que Gerbert tinha do novo sistema não pareça ser completo, não podemos deixar de admirar o seu ábaco, onde as peças se confundem com os novos numerais.

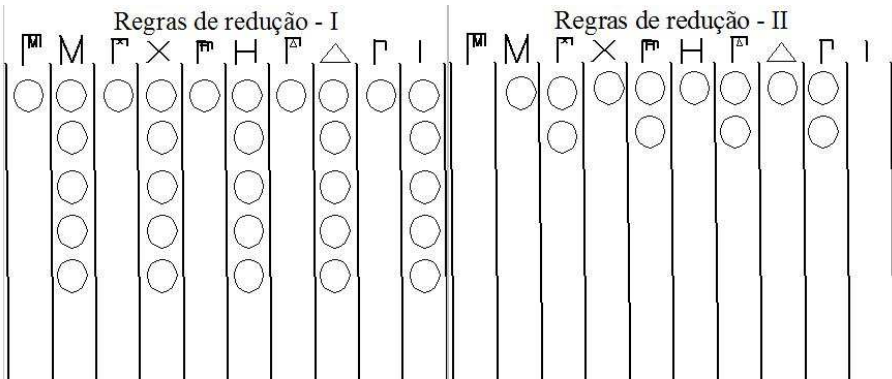
Para melhor compreender quão revolucionário e eficiente era este artefacto, vejamos sucintamente como funcionavam os ábacos tradicionais que precederam o de Gerbert.

Na Grécia antiga, os números eram representados recorrendo a letras. Os cálculos eram necessariamente laboriosos e o recurso a ábacos um expediente natural.

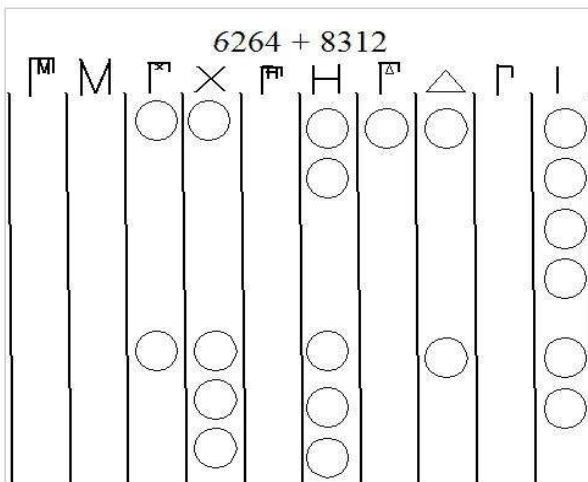
O ábaco grego funcionava com pedrinhas em colunas encimadas pelos valores 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10 000, 50 000. Isto é, para além das potências de 10, tínhamos os seus quintuplos.



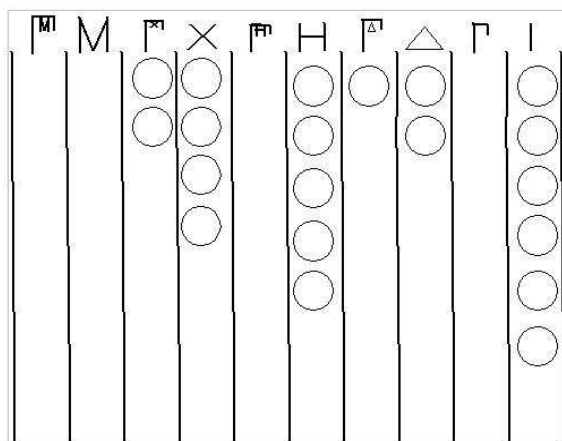
As regras de conversão dos valores das peças nas diversas colunas --- cinco peças numa coluna de ordem ímpar valem tanto como uma peça na coluna imediatamente à sua esquerda; duas peças numa coluna de ordem par valem tanto como um peça na coluna imediatamente à esquerda --- estão ilustradas nas figuras seguintes.



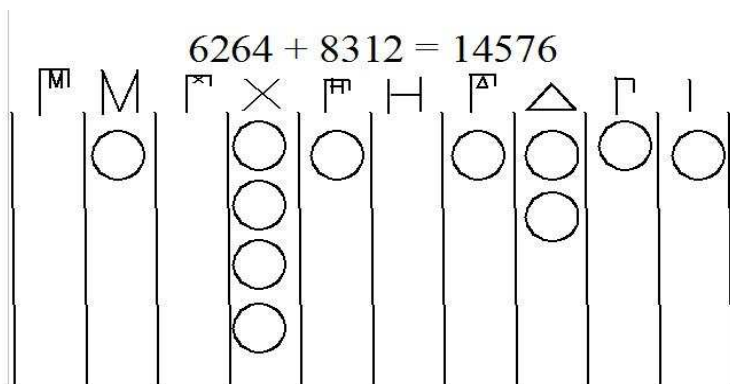
Uma soma seria, com grande verosimilhança, efectuada por agrupamento. Por exemplo, para determinar $6264 + 8312$, representa-se primeiro 6264 e depois a segunda parcela.



Juntamos todas as peças:



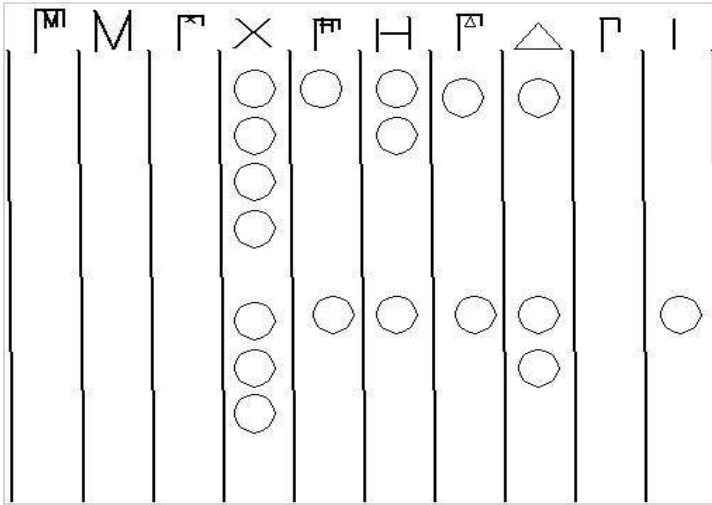
e aplicando os processos de redução obtemos o total.



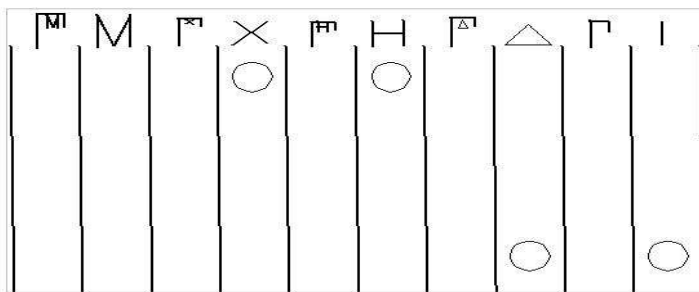
Para a subtração seria necessário introduzir o aditivo e o subtrativo separadamente e, depois, cancelar peças

homólogas. Quando necessário ter-se-ia de recorrer a anti-redução, para garantir a possibilidade de cancelamentos na mesma coluna. Após este procedimento, a diferença pretendida seria obtida.

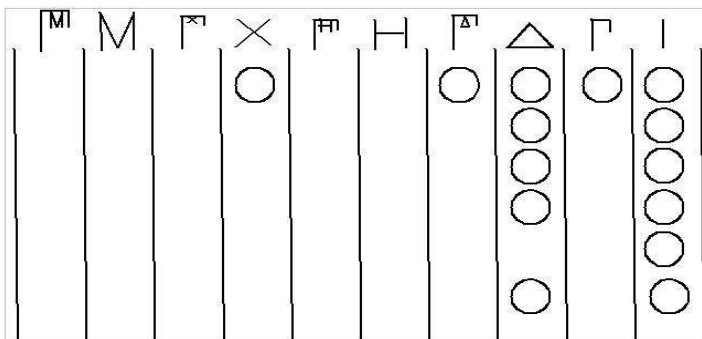
Veamos um exemplo: 4670-3671.



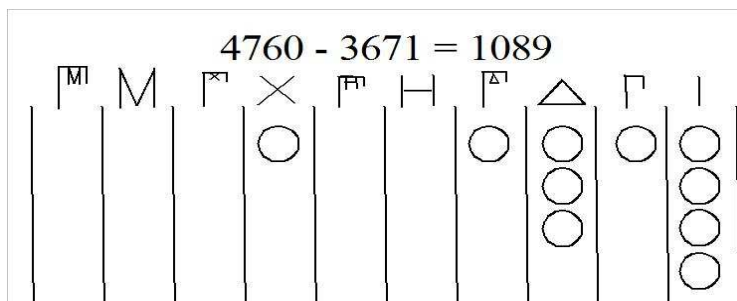
Retirando pares de pedras de cada coluna, obtemos:



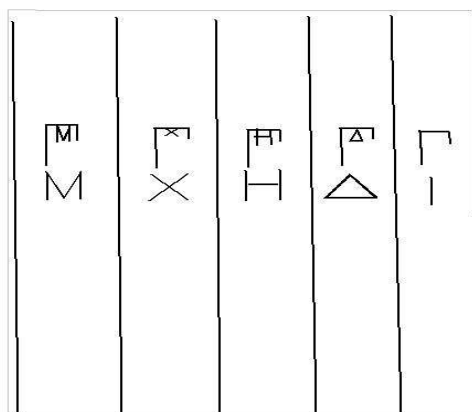
Agora temos de recorrer a anti-redução para viabilizar os cancelamentos necessários:



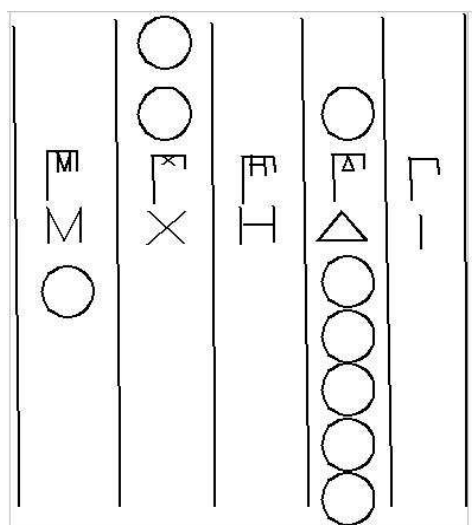
A diferença é então:



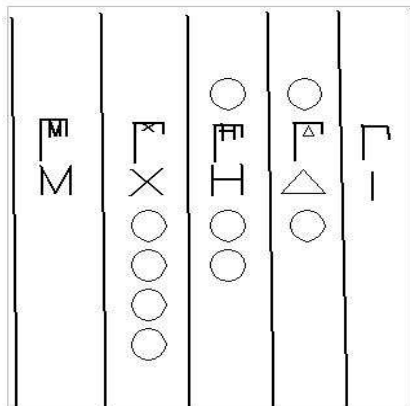
Nos ábacos de colunas decimais, em que os múltiplos das potências de 10 se encontram alinhados com estas, os procedimentos eram semelhantes.



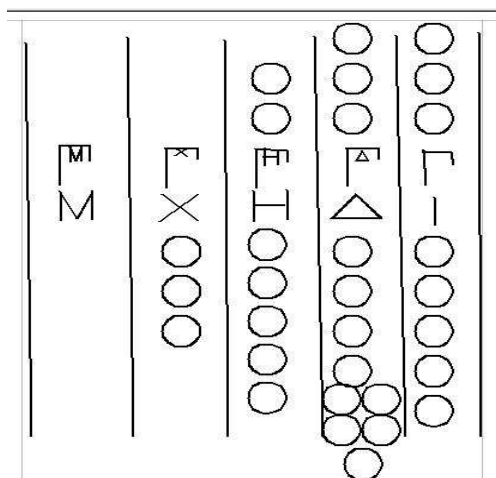
As regras de redução são agora tipificadas pelas ilustradas abaixo.



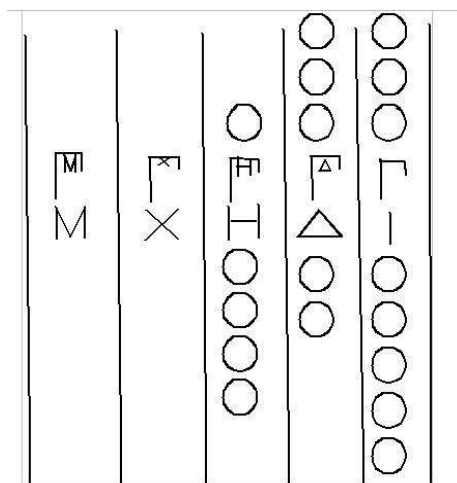
Contudo, neste tipo de ábaco, para efectuar uma subtração, teria de se recorrer a uma “anti-redução total” do aditivo antes de considerar o subtrativo. Por exemplo, para efectuar $4760 - 3671$, deveríamos partir de



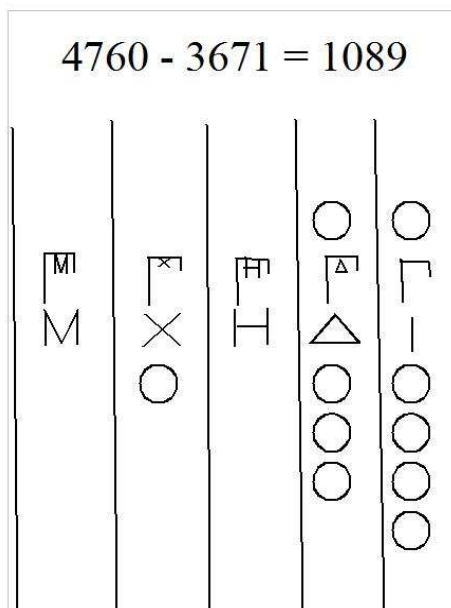
Anti-reduzir:



retirar 3671, uma casa decimal de cada vez

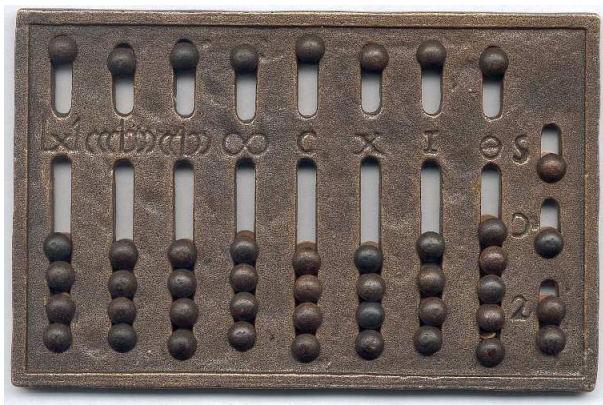


Finalmente, aplicamos as regras de redução para obter a diferença desejada:



Os ábacos romanos eram essencialmente os mesmos, a menos da notação dos numerais, claro.

Uma novidade romana, contudo, foi o ábaco “de bolso”, metálico.



Neste artefacto as contas são ainda mais difíceis, devido à rigidez do número de peças por coluna. Assim como nos ábacos chinês, japonês e russo, os cálculos só se efectuam com recurso a manipulações elaboradas de redução e anti-redução.

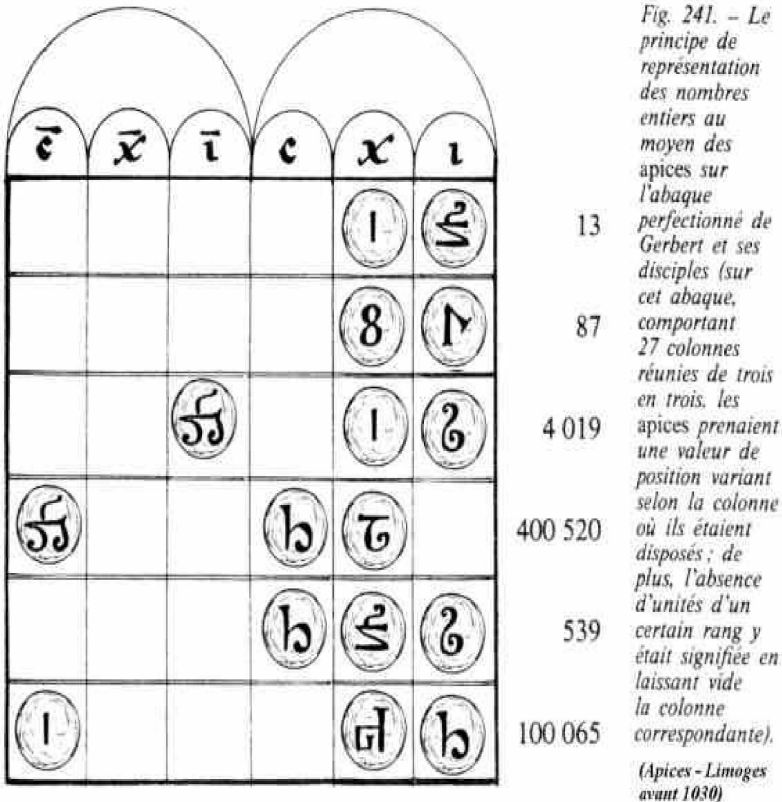
Só nos debruçamos sobre as operações de soma e subtração, para ilustrar como mesmo os aspectos mais elementares da aritmética estavam longe de ser trivializados por estas ajudantes.

Sendo a soma e, principalmente, a subtração, processos sofisticados de manipulação destes objectos, não é plausível que a multiplicação e a divisão neles se praticassem usualmente.

Bernelin, um discípulo de Gerbert, escreveu um manual do novo ábaco, *Liber abaci*, durante o papado do primeiro.

Relembremos que, para além de expoente cultural máximo da cristandade, Gerbert foi o Papa Silvestre II desde 999 até ao ano da sua morte, em 1003. Esta é a fonte principal que nos dá a conhecer o ábaco de Gerbert. Richer (991-998), um outro discípulo, escreveu também umas linhas sobre este assunto e Gerbert descreve algumas regras de operação, muito confusas, numa carta de 980.

Vejamos do que se trata.

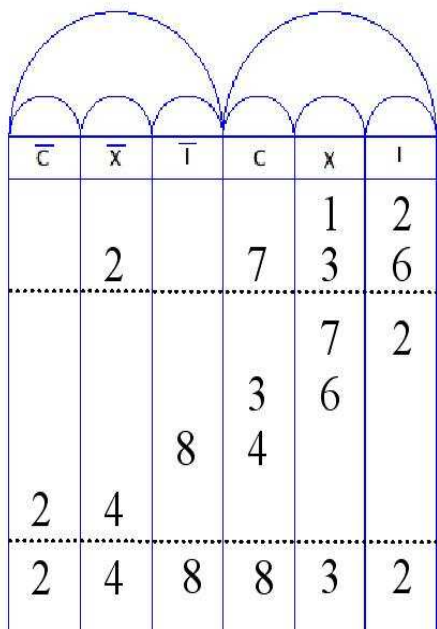


As peças utilizadas neste ábaco não são todas iguais, como nos anteriores. Cada uma representa um dígito indo-árabe, de 1 a 9. Não existe zero. Assim, para representar um número, cada

coluna pode conter, no máximo, uma peça. Isto corresponde ao nosso habitual sistema posicional decimal, já que as colunas são encimadas pelas potências de 10.

O método para operar este aparelho é completamente novo. Bernelin ilustra uma multiplicação, correspondente ao último passo da resolução do seguinte problema: temos 12 quartos, em cada um 12 carpetes, sobre cada uma 12 homens, com cada um 12 mulheres, cada uma com 12 crianças. Quantas crianças há? Trata-se de calcular $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$.

A figura mostra a determinação de $12 \times 20\,736$.



$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{l}$	c	x	l
				1	2
	2		7	3	6
				7	2
			3	6	
		8	4		
2	4				
2	4	8	8	3	2

Identifica-se imediatamente o método utilizado. Introdúz-se o multiplicando, depois o multiplicador. Calcula-se o produto

de cada dígito deste pelo multiplicando e regista-se este resultado parcial, movendo sucessivamente estes números para a esquerda, para respeitar o valor posicional de cada produto parcial. Por fim, adicionam-se todas estas parcelas.

A diferença entre este ábaco e os anteriores, de peças indistintas, é enorme.

Vemos surgir aqui, pela primeira vez na Europa, os algarismos indo-árabes e a notação decimal posicional.

Contudo, a ausência de zero e o facto de não ser um processo de “papel e lápis”, mas ainda uma mesa onde se movem pedrinhas, mostra que os trabalhos de Al-Kwarizmi não eram conhecidos completamente. A paternidade deste novo processo deve, com toda a verosimilhança, ser atribuída a Gerbert.

Se a multiplicação é demasiado parecida com a nossa para nos impressionar, o método usado para dividir, por outro lado, é extremamente interessante. Na realidade, há dois processos para dividir, a *divisio ferrea* e a *divisio aurea*.

C	x	I
	1	
		6
		4
6	6	8
6	6	8

No primeiro, para além do dividendo e do divisor, faz-se recurso a um divisor auxiliar com o objectivo de facilitar os cálculos. Bernelin dá vários exemplos. O primeiro diz respeito a $668:6$.

Começa-se por registar o divisor auxiliar, neste caso 10 (um 1 na segunda coluna), o divisor verdadeiro, a diferença entre os dois e o dividendo (repetido, porque um deles vai “desaparecendo” durante o processo).

O primeiro passo consiste em dividir 6 centenas por 10. Na descrição de Bernelin, isto corresponde a fazer deslizar o dígito correspondente para a segunda coluna sob o traço inferior (em termos modernos diríamos que 600 divididos por 10 dá 60).

c	x	i
	1	
		6
		4
6	6	8
2	6	8
	4	
	6	

Repare-se que o resultado usa a mesma peça, correspondendo este cálculo a um simples deslocamento de uma peça no tabuleiro. Como se dividiu por 10 em vez de se usar o divisor verdadeiro, 6, tem de se compensar, somando ao dividendo o produto da diferença entre o divisor auxiliar e o verdadeiro pelo quociente parcial, isto é $4 \times 60 = 240$.

De seguida divide-se 200 por 10 (deslizar o 2 para baixo, na segunda coluna) e compensa-se somando $4 \times 20 = 80$ ao dividendo:

c	x	i
	1	
		6
		4
6	6	8
	6	8
	4	
	8	
	6	
	2	

Verifiquemos a situação actual. O nosso dividendo é agora 188, temos um quociente de $60+20$.

C	x	I
	1	
		6
		4
6	6	8
	6	8
	4	
	8	
1	8	8
	6	
	2	

Continuemos, dividindo 100 por 10 e corrigindo com a soma de 4×10 ao dividendo:

C	x	I
	1	
		6
		4
6	6	8
	6	8
	4	
	8	
	8	8
	4	
	6	
	2	
	1	

Simplificando a situação ilustrada, e omitindo o divisor 668, obtemos:

C	x	I
	1	
		6
		4
1	2	8
	6	
	2	
	1	

Ainda temos uma quantidade nas centenas do dividendo... Temos então de dividir 100 por 10 e corrigir:
Atingimos a situação seguinte:

Muitas vezes experimentamos um quociente e depois temos de o substituir por outro, por termos estimado por excesso. O método de Gerbert tem o mérito de evitar palpites e subtrações. Após a escolha do divisor auxiliar, o processo é completamente automático!

Uma boa escolha do divisor auxiliar simplifica as contas e induz regras simples (dividir por uma potência de 10 corresponde a mover uma peça do dividendo para o quociente, etc.).

A justificação matemática para o bom funcionamento deste método, caracterizado pela utilização de um divisor auxiliar, baseia-se em propriedades simples das operações. Vamos admitir que estamos a tentar dividir d por b . Procuramos então q e r tais que

$$d = q \times b + r$$

o que equivale a

$$d + q \times z = q \times (b + z) + r$$

portanto, é importante escolher z de forma a que $b + z$ seja “simpático”. Neste contexto a simpatia mede-se pela simplificação dos cálculos, pelo que as potências de 10 e os seus múltiplos são as escolhas mais evidentes.

A *divisio ferrea*, para além da sua importância histórica, pode ser utilizada no ensino com proveito, visto que promove uma reflexão inspiradora sobre os algoritmos.

A *divisio aurea* mal se distingue do nosso algoritmo actual, pelo que não a descreveremos aqui. Contudo, trata-se de um

algoritmo novo muito poderoso e da autoria do Papa-sábio, já que, não recorrendo ao papel-e-lápis, não deve corresponder a algo que tivesse aprendido na Catalunha de proveniência árabe. Trata-se, de novo, de algo genuinamente criado por Gerbert.

Concluindo, este auxiliar aritmético é extremamente eficiente e conceptualmente novo. Se bem que não seja ainda o sistema indo-árabe para operar no papel, trata-se sem dúvida da primeira incursão dos numerais de origem árabe que haveriam de se espalhar pela Europa, séculos mais tarde.

Os métodos operatórios são sofisticados e muito originais. A genialidade de Silvestre II está por certo na sua génese.

Referências

Bernelin's *Liber Abaci* (999-1003) in *Libre d'Abaque*, tradução e notas de Béatrice Cassiut, Éditions des Regionalismes, 2011.

Schärli, Alain, *Un portrait de Gerbert d'Aurillac*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2012.