

Metrologia: uno sguardo alle grandezze fisiche fondamentali; il Pendolo, il Piano Inclinato e g.

Costantino Sigismondi

(ICRA/Sapienza Università di Roma and IIS F. Caffè)

Abstract

Metrology studies the standards utilized in physics, we focus on MKS introduced by Giovanni Giorgi at the turn of XIX-XX century. Galileo, the pendulum and the inclined plane are reviewed to obtain the universal g.

Sommario La metrologia studia gli standard utilizzati in fisica, noi ci concentriamo sul sistema MKS, introdotto da Giovanni Giorgi ai primi del novecento; presento Galileo, il piano inclinato e pendolo e l'accelerazione g.

Introduzione

Le grandezze fisiche possono essere misurate con uno strumento, e la loro misura espressa con un numero¹ che indica il rapporto con un campione standard.² Nella prima lezione ci siamo soffermati su tre tipi di standard, quelli legati al vecchio sistema MKS, al quale l'ingegnere Italiano Giovanni Giorgi (1871-1950) lavorò molto tanto da esserne considerato il padre; MKS è più adatto agli studenti di primo anno di fisica.

Il metro

Tutta la metrologia prende il nome proprio da questa grandezza fondamentale. La parola metro viene dal greco *métron* che vuol dire proprio 'misura'.

Con la Rivoluzione Francese dal 1789 si volle riformare anche tutta la scienza, e le unità di misura, che erano diverse da una città all'altra: a Roma i palmi romani,³ a Parigi i piedi parigini...

1 Filolao 470-390 a. C. allievo di Pitagora diceva "Il numero è il vincolo che per l'innata sua virtù regge l'eterna serie delle cose mondane"

2 Lo standard è qualcosa che va bene per tutti, esempio una presa standard ospita tutte le spine, mentre una non standard non lo fa. È quindi importante che un chilogrammo, un metro e un secondo siano gli stessi ovunque: questo è il senso di standard in questo contesto.

3 Sul pavimento della Basilica di san Pietro, all'interno del portone centrale trovate la lunghezza in metri: 186 e in palmi romani: 837.

Il metro doveva essere la 40 milionesima parte del giro dell'equatore terrestre, ma quella misura risultò molto complessa e alla fine si costruì un campione di platino-iridio che fu conservato all'Ufficio dei Pesi e delle Misure a Sèvres, vicino a Parigi.

Il chilogrammo

Doveva essere, secondo Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794), una quantità facile da riprodurre, perciò il famoso chimico aveva proposto la quantità di acqua in un decimetro cubo, 10 cm x 10 cm x 10 cm. Il problema nasceva variando la temperatura, o la composizione dell'acqua. L'acqua raggiunge la massima densità a 4°C, così da permettere ai pesci di svernare sul fondo degli stagni ghiacciati, senza rimanere ghiacciati anch'essi. L'acqua più densa sta in fondo e il ghiaccio meno denso galleggia,⁴ così il chilogrammo è a 4°C.⁵ Variazioni anche piccole di temperatura modificano la densità dell'acqua, e di conseguenza muta la massa nel decimetro cubo. A Sèvres è conservato il chilogrammo in platino-iridio.

Il secondo

Galileo Galilei (1564-1642) scoprì, usando il battito del suo cuore come riferimento (e noi sappiamo quanto varia la frequenza cardiaca nel tempo), nel 1589 le leggi del pendolo, e Christiaan Huygens (1629-1695) ne perfezionò le tecniche. Ora il semi-periodo di oscillazione di un pendolo composto di una palla appesa a un filo inestensibile di 1 metro è il secondo. Ma anche in questo caso una variazione di temperatura avrebbe modificato la lunghezza del filo e il periodo di oscillazione. Durante tutto il settecento si cercarono leghe a bassa espansione termica (quella per cui i ponti hanno giunture più larghe d'inverno che d'estate) John Harrison

4 Queste leggi le dobbiamo ad Archimede Pitagorico, 272-218 a. C.

5 <https://it.wikipedia.org/wiki/Chilogrammo>

(1693-1776) realizzò orologi meccanici precisi per mesi e capaci di funzionare sulle navi. Il secondo era $1/86400$ del giorno.

La velocità della luce, costante della fisica

Pur essendo grandissima, la velocità (celeritas in latino) della luce nel vuoto $c=299792458$ m/s, è costante sia se la misuriamo a bordo di un treno, sia dalla stazione. Treno e stazione sono due sistemi in moto relativo tra loro, ma la luce che sta sul treno e quella in stazione viaggiano alla stessa velocità. Albert Einstein (1879-1955) usò questo fatto come fondamento della sua teoria della Relatività: la luce nel vuoto ha velocità costante indipendentemente dal sistema di riferimento.

A questo punto per ottenere il metro campione che è una grandezza di “spazio”, se abbiamo una “velocità” costante universale, ci serve una grandezza di “tempo” per cui moltiplicarla, un tempo veramente standard, non soggetto a variazioni di temperatura, questo standard fu trovato nella radiazione tra due livelli energetici dell'atomo di Cesio 133.

Il Cesio 133 è usato per gli orologi atomici, che sbagliano di 1 secondo ogni milione di anni. Nel 2014 a Boulder, Colorado hanno costruito con atomi di stronzio un orologio più preciso sbaglia di 1 s ogni 5 miliardi di anni!

La radiazione è luce di un colore particolare, possiamo dire che questi colori restano immutati nei secoli, e millenni, perciò sono gli standard più accurati. Dallo standard di tempo: 1 secondo “astronomico” legato alla rotazione della Terra sul suo asse (giorno solare medio), si è ottenuto lo standard atomico: $1\text{ s} = 9192631770$ periodi atomici del Cesio 133.⁶

Dal secondo al metro con Einstein e c, la velocità della luce

Definito il secondo, poiché nel moto rettilineo uniforme $s=v*t$, sostituiamo v con c , la velocità della luce e al tempo $1/299792458$ s e otteniamo il metro come spazio

6 <https://it.wikipedia.org/wiki/Secondo>

corrispondente.⁷ Come chilogrammo campione invece resta valido quello di Sèvres in platino-iridio.

Al tempo di Carlo Magno (793) il *pondus caroli* fu lo standard vigente, circa 406 g. Lo standard era garantito da una precisa lega di argento, battuta solo nella zecca imperiale.

Dal *pondus* si realizzavano 240 *denari*, e questi standard restarono validi durante il medioevo. Da Carlo Magno ai nostri giorni il concetto di standard di peso non è cambiato.⁸

Noi possiamo usare le monete dai due euro al centesimo di euro come pesi campione: entro 0.01 g sono accurate.⁹

L'esperimento di Galileo con il piano inclinato

Un piano inclinato di cinque metri di lunghezza con dei campanellini posti a distanze opportune ha permesso a Galileo di provare la legge del moto uniformemente accelerato: interrompendo un flusso d'acqua "pesava" il tempo nel bicchiere!¹⁰

Materiale: un banco, una matita, una pallina, tre libri.

Metodo: si inclina il banco ponendo sotto un lato i tre libri. La matita è la nostra unità di misura: si segnano i punti distanti 1, 4, 9 e 16 matite dal bordo rialzato: sono i quadrati di 1, 2, 3, 4.

Misure: la pallina rotola impiegando tempi uguali da un segno all'altro. Misuriamo 1) a orecchio, battendo sul banco la matita ad ogni passaggio 2) con un cronometro, 3) con un video contando i fotogrammi tra un passaggio e il successivo. Galileo fece suonare le campanelle (1) e usò il pendolo (2).

Conseguenze: lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo, il grafico spazio (y) tempo (x) è una parabola. Galileo capì che l'accelerazione "g" è la stessa per tutti i corpi.

7 <https://it.wikipedia.org/wiki/Metro>

8 La scuola di Varenna "Int.School of Physics E. Fermi" in programma dal 27/6 al 6/7/2016 tratta proprio di Metrology: from physics fundamentals to quality of life http://www.sif.it/attivita/scuola_fermi/mmxvi#196

9 <http://euro.raddos.de/italiano/monete.php>

10 http://www.beic.it/project_galileogalilei/claudia_borghini_galileo_piano_inclinato.php

La progressione aritmetica dei numeri dispari e $a=\text{costante}$

Galileo non diceva di aver posto i segnali sui punti corrispondenti ai quadrati di 1, 2, 3, 4, cioè 1, 4, 9 e 16...bensì di collocare i *referimenti spaziali secondo i numeri dispari*, cioè 1, 3, 5, 7, 9... ogni spazio cresce uniformemente di due unità (progressione aritmetica).

Si può verificare con un po' di addizioni che $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$ e così via. Galileo era professore di Matematica!

In questo modo prese "due piccioni con una fava": disegnò spazi uniformemente crescenti (aumentano di 2 unità ogni volta), che attraversati in tempi uguali, dimostravano un'accelerazione " a " uniforme! E dimostrò anche la legge dei quadrati: lo spazio " s " cresce proporzionalmente al quadrato del tempo: $s=kat^2$, con $k=\text{costante}$.

L'accelerazione è il rapporto tra velocità e tempo $a=\Delta v/\Delta t$, la velocità dipende dal rapporto tra spazio e tempo $v=\Delta s/\Delta t$; se i Δs crescono come 1, 3, 5, 7... e i Δt sono costanti, anche le velocità crescono come 1, 3, 5, 7... ma le variazioni di v Δv restano costanti $\Delta v=(3-1)=(5-3)=(7-5)$... perciò essendo il ritmo dei passaggi Δt costante, l'accelerazione è costante!

Galileo estese il risultato anche alla caduta libera, considerandola il caso limite del piano inclinato con inclinazione verticale. Aveva così dimostrato che tutti i corpi cadono di moto uniformemente accelerato, superando la visione di Aristotele (384-322 a. C.) secondo cui i corpi cadevano a velocità uniforme, proporzionale alla massa: un corpo più pesante doveva cadere a terra più velocemente.

Il famoso esperimento della piuma che cade veloce come la pietra nel vuoto era stato immaginato già da Galileo, che aveva capito che le velocità di caduta uniformi dipendevano dall'attrito dell'aria. Il vantaggio offerto da una palla che rotola è quello di ridurre ad un solo punto l'attrito con il piano.

Un'accelerazione uguale per tutti: “g”: il pendolo

Se lasciamo rotolare una palla più grossa questa viaggerà più lentamente di una piccola a causa della sua maggiore inerzia al movimento di rotolamento. La parola inerzia è sinonimo di indolenza, quasi un rifiuto di fare qualcosa, lentezza a rispondere... molti studenti ne fanno qualcosa! In fisica rappresenta proprio l'opposizione al moto dei corpi, e cambia se la massa è concentrata in un punto “materiale” oppure in un solido esteso. Nella realtà tutti i corpi sono estesi (più o meno) e non esistono veri e propri punti materiali, che sono il caso limite per corpi piccoli, ma di massa uniforme.

Se un corpo si muove senza rotolare è come se la sua massa fosse concentrata in un punto, il suo baricentro. È questo il caso del pendolo semplice (palla e filo appeso ad un punto).

Galileo aveva osservato i lampadari della Cattedrale di Pisa quando oscillavano lentamente, e poi si era accorto che il periodo di oscillazione del pendolo dipendeva solo dalla lunghezza del filo e non dalla massa appesa! Aveva dimostrato che l'accelerazione “g” di gravità era la stessa per tutti i corpi, senza il problema dell'inerzia dei corpi solidi risolto nel 1687 da Isaac Newton (1642-1727) nei suoi *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, latino: i Principi Matematici della Fisica.¹¹

Ricapitolando: le masse appese al pendolo non rotolano, e si comportano come punti materiali, questo permette di vedere che l'accelerazione di gravità, che determina il moto e il periodo del pendolo, non dipende dalla massa appesa.

Esercitazione 1) con dei lacci da scarpa costruire dei pendoli appendendo dei pesi (una mela) e verificare che a parità di lunghezza del filo-centro della mela il periodo è lo stesso.

2) misurare l'allungamento percentuale $\Delta l/l_0$ di un laccio, che a riposo è lungo l_0 e sotto tiro si allunga di $\Delta l = l - l_0$: legge di Hooke

¹¹ http://www.treccani.it/enciclopedia/l-eta-dei-lumi-astronomia-l-astronomia-del-sistema-solare-da-newton-a-laplace_%28Storia-della-Scienza%29/

Questionario

La legge del moto rettilineo uniforme si esprime con la frase

- 1) il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali
- 2) un punto materiale percorre spazi uguali in tempi uguali
- 3) un p.m. percorre spazi uniformemente crescenti in t. uguali
- 4) un p.m. percorre spazi proporzionali ai numeri dispari in “.

La legge del moto rettilineo uniforme descrive bene

- 1) la caduta di una goccia di pioggia in aria
- 2) la caduta di una palla di ferro dalla Torre degli Asinelli
- 3) il rotolamento di una palla su pavimento orizzontale liscio
- 4) il rotolamento di una pallina su un piano inclinato

La legge del moto uniformemente accelerato si esprime

- 1) un p. materiale si sposta con velocità uniformē crescente
- 2) un p. materiale copre spazi uniformē crescenti in t. uguali
- 3) un p. materiale è animato di accelerazione costante
- 4) lo spazio percorso dal p. m. cresce col quadrato del tempo

La legge del moto circolare uniforme si esprime

- 1) il raggio vettore circolare spazza aree uguali in tempi uguali
- 2) il p. m. su un cerchio descrive angoli uguali in tempi uguali
- 3) un corpo si muove su un cerchio con velocità costante
- 4) un corpo percorre archi di cerchio uguali in tempi uguali

La seconda legge di Keplero si esprime

- 1) il raggio vettore spazza angoli uguali in tempi uguali
- 2) il raggio vettore su ellissi spazza aree uguali in tempi uguali
- 3) la velocità areale di un pianeta su orbita ellittica è costante
- 4) il raggio vettore si allunga e si accorcia lungo un'ellissi

La sequenza dei primi quadrati dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5

- 1) si ottiene sommando tutti i numeri dispari fino a 5
- 2) si ottiene sommando i primi cinque numeri dispari
- 3) si ottiene sommando i primi 1, 2, 3, 4 e 5 numeri dispari
- 4) si ottiene sommando i primi cinque numeri primi

Galileo Galilei visse nel 1) 15° 2) 16°-17° 3) 18° 4) 18°-19° sec.?

Problemi

- 1) scrivere una tabella con Spazio e Tempo e dati di un moto rettilineo uniforme inventato.
- 2) disegnare un grafico di Spazio (asse y) e Tempo (asse x) di un moto rettilineo uniforme.
- 3) scrivere una tabella con Spazio e Tempo e dati di un moto rettilineo uniformemente accelerato inventato.
- 4) disegnare un grafico di Spazio (asse y) e Tempo (asse x) di un moto rettilineo uniformemente accelerato
- 5) calcolare dall'equazione $s = \frac{1}{2} g t^2$ con $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ quanti metri percorre un sasso in caduta libera dopo 1, 2, 3, 4 e 5 secondi, e valutare quanti piani (alti 3 metri l'uno) ha percorso.
- 6) Calcolare dalla formula $T = 6.28\sqrt{L/g}$ con L =lunghezza del filo e g accelerazione di gravità, il periodo di un pendolo semplice con il filo lungo $l=1\text{m}$, ed $l=2\text{m}$.
- 7) Fare un grafico di due grandezze in proporzionalità diretta.
- 8) Fare un grafico di due grandezze in proporzionalità inversa.
- 9) Fare un grafico di due grandezze A e B una (A) proporzionale al quadrato dell'altra (B).
- 10) Se due grandezze sono tali da essere una A proporzionale all'inverso del quadrato dell'altra B, il prodotto di $A \cdot B^2$ è costante, mentre se sono inversamente proporzionali $A \cdot B = \text{cost}$ Verificarlo per le grandezze nelle tre tabelle:

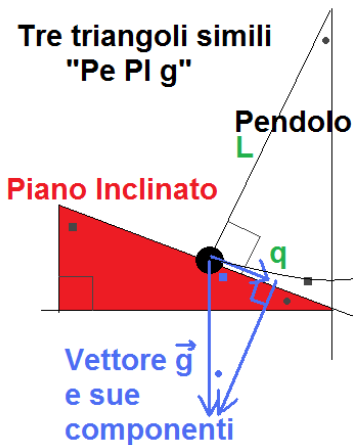
A	B	A	B	A	B
1	1	1	2	1	1
2	0.5	2	1	2	0.25
3	0.333	3	0.666	3	0.111
4	0.25	4	0.50	4	0.0625
5	0.20	5	0.40	5	0.04

- 11) Un treno percorre spazi che aumentano di un metro ogni volta, sempre in un secondo. Qual è la sua accelerazione?

Le piccole oscillazioni del pendolo e la scomposizione di g

Il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo dipende solo dalla lunghezza L del filo, la legge matematica è $T=2\pi\sqrt{L/g}$: è la conseguenza dell'accelerazione di gravità uguale per tutti i corpi. Per dimostrarlo scomponiamo il vettore g , diretto "aristotelicamente" verso il centro della Terra nella sua componente parallela al piano inclinato $p//$ e in quella perpendicolare $p\perp$. La presenza del piano offre la reazione vincolare, che si oppone a $p\perp$, mentre lascia agire solo $p//$.

Questo fa sì che tecnicamente un **piano inclinato** sia una **macchina vantaggiosa**. Per i triangoli simili si può dimostrare senza difficoltà che $p//=g\cdot h/q$, dove h è l'altezza del piano inclinato rispetto all'orizzontale e q la sua lunghezza misurata proprio sull'orizzontale.



Adesso torniamo al pendolo, e spostiamolo dalla sua posizione verticale di equilibrio di una quantità piccola q . Possiamo immaginare il piombo del pendolo, in questa nuova posizione, come giacente su un piano inclinato esattamente come la perpendicolare al filo del piombo in quel momento.

Il piombo, essendo attaccato al filo inestensibile, non può che muoversi lungo l'arco di cerchio, e perciò perpendicolarmente al filo stesso. Il piombo percorre **circa** $\Delta s=4q$ per ritornare al punto di partenza e compiere un'oscillazione completa. Il periodo T lo otteniamo dividendo lo spazio $4q$ per la velocità media del primo tratto lungo q . Usiamo qui il metodo di

Leonardo Eulero (1707-1783) e ripreso dal premio Nobel Richard P. Feynman (1918-1988) per le orbite dei pianeti.¹²

Eulero approssimava la velocità media in un moto uniformemente accelerato con quella raggiunta **a metà** dell'intervallo temporale Δt scelto. $\langle v \rangle \approx g \cdot \Delta t / 2 = gqT/8L$. Il periodo $\Delta t = T = \Delta s / \langle v \rangle$. Esplicitando l'equazione nei suoi termini è quadratica in T , così $T^2 = 4q \cdot 8L/gq = 32L/g$, da cui $T \approx 5.7\sqrt{L/g}$, approssimazione del 10% inferiore alla legge esatta: Si è così dimostrato che T dipende da $\sqrt{L}$; Galileo dimostrò tre cose:

- 1) Il periodo del pendolo **dipende dalla lunghezza del filo**.
- 2) Il periodo **non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni**.
- 3) Il periodo **non dipende dalla massa del corpo**.

Riassumendo: l'importanza del piano inclinato e del pendolo

Galileo con il piano inclinato ha mostrato che la caduta libera è un moto uniformemente accelerato, cioè che ad ogni intervallo di tempo il corpo aumenta la sua velocità di uno stesso valore. Con il pendolo si verifica che l'accelerazione è la stessa per tutti i corpi, essendo il periodo dipendente solo dalla lunghezza del filo (visto con un astuccio e varie masse dentro). Il pendolo nella sua posizione iniziale è come posato su un piano inclinato che sparisce quando la massa inizia ad oscillare, ma senza rotolare: solo così l'accelerazione è veramente la stessa per tutti i corpi.

Il piano inclinato consente di studiare la scomposizione del vettore accelerazione di gravità in componente parallela e quella perpendicolare al piano a cui reagisce la forza vincolare. Il pendolo è uno strumento di misura del tempo, Galileo ha scoperto l'**isocronismo (=periodo) delle piccole oscillazioni**, gli orologiai del XVII-XIX secolo lo hanno perfezionato e usato per tutte le misure astronomiche, fino all'orologio atomico.

¹² Fisica, Book in Progress 1 anno cap. 4 (ITIS Majorana Brindisi, 2014), da lezione di R. P. Feynman sull'orbita dei pianeti col metodo di Eulero.