

Fotogrammetria dell'Obelisco Vaticano con il Sole

Costantino Sigismondi

(ICRA/Sapienza e IIS F. Caffè, Roma)

Abstract

The Vatican Obelisk has been moved to St Peter's square by Domenico Fontana in 1586. The measurement of its height using the shadow on the floor is compared with Fontana's original data and with digital photo, corrected by perspective. A pincushion deformation is found in the camera.

Riassunto

L'Obelisco Vaticano è stato collocato da Domenico Fontana nel 1586. La sua altezza viene misurata con la lunghezza dell'ombra al suolo e comparata con i dati pubblicati dal Fontana e quelli ottenuti da foto digitali corrette per effetti di prospettiva. La deformazione a cuscinetto è presente nella camera.

Introduzione

Domenico Fontana riportò dettagliatamente le misure dell'Obelisco Vaticano inaugurato con una messa votiva della S. Croce il 14 settembre 1586 e una processione: *“La croce di bronzo dorata è alta con i suoi finimenti sopra la punta della guglia (il monolito) palmi 26, la croce senza finimenti è alta palmi 10 [...]. La guglia con tutti li suoi finimenti è alta palmi 150 $\frac{3}{4}$ e [...] si viene ad innalzare dal piano della piazza fino alla sommità della detta croce, palmi 180 $\frac{1}{4}$.¹ Sisto V concesse in perpetuo un'indulgenza di 10 anni e 10 quarantene (quaresime) a chi passando contrito e confessato, dirà un Pater nostro e un'Avemaria, & inchinandosi alla Santa Croce posta nella cima della Guglia, pregherà Dio per il Felice stato di santa Chiesa, e per il Pontefice Romano.”* Traducendo i dati da palmi romani a metri, l'elevazione totale risulta pari a 40.135 m, il monolito 33.566 m.

Foto e correzioni prospettiche

Schematizzando l'obelisco a 32.3 metri di distanza ci si accorge che il campo di vista CdV occupato da un metro alla sua base

1 https://archive.org/stream/gri_33125008662708#page/n77/mode/2up

è $1/29$ di quello di tutto l'obelisco, perché aumentando la distanza tra obiettivo e punto ad altezza h sull'obelisco, il CdV di 1 metro si riduce progressivamente $CdV = \arctg[1/\sqrt{(h^2+32^2)}]$.



Fig. 1 L'obelisco, in diagonale, è alto 40.135 m e da 32.3 m occupa un campo di vista $CdV = 51.2^\circ = \arctg(40.135/32.3)$.

Nella foto misuriamo le lunghezze in pixel, ma ogni pixel sull'obelisco è a diversa altezza h e distanza d dall'obbiettivo; inoltre i campi di vista angolari sono sottoposti alle deformazioni ottiche delle lenti. L'asse ottico dell'obbiettivo della fotocamera SANYO CG9 è assunto al centro delle diagonali della foto. In tabella la deformazione ottica a cuscino emerge dal rapporto tra dimensioni angolari calcolate e misurate in pixel agli estremi della diagonale (base e croce)

elemento	Dim. [°]	Lung. [px]	Fraz °calc./px oss	Rapporto Oss./Calc.
Obelisco	51.17°	1438	angoli/pixel(oss)	val. medio 1,13±0,01
1.4m base	1.77°	79.3	0,0485/0,0551	1,1180
5m79crux	4.03°	126.6	0,0787/0,0880	1,1275

La deformazione a cuscinetto su un reticolato dà un ingrandimento maggiore con la distanza dall'asse ottico, come nel caso nostro. Di questa deformazione bisogna tenere conto in applicazioni fotogrammetriche, come la presente.

Foto dell'obelisco da 466 m (via S. Pio X) e da 1235 m (Metro Ottaviano) consentono una migliore valutazione dei rapporti tra le parti dell'obelisco, perché è vicino all'asse ottico e meno influenzato dalla prospettiva. La cuspidale piramidale è alta 1m.



Fig. 2 Da 466 m $1.4\text{ m}=26\text{ px}$, l'obelisco è 763 px fino al top, e la proporzione da 41,11 m, il 2.3% in più dei dati del Fontana.

Misura dell'altezza con la gnomonica

Anche la misurazione dell'ombra dell'obelisco è stata fatta il 4 giugno 2015 alle 13:44 dopo il transito meridiano, con gli

studenti di 5BL. Ricostruendo la posizione dell'ombra dello spigolo del monolito a 10.8 m dallo spigolo della base e l'altezza del Sole 69.15° al momento della misurazione, lo spigolo superiore del monolito risultava a 32.03 m dal suolo della piazza. Il monolito termina con una cuspide piramidale, sormontata dalla croce con il suo ancoraggio. L'altezza di questo spigolo, base della cuspide, non è presente in nessun dato in letteratura e in internet, perciò questi rilievi.

L'ombra estiva nasconde anche la croce e la cuspide e si è tenuto conto del rientro di 1.4 m della proiezione di questa cuspide rispetto alla base dove parte l'ombra al suolo. Dalla foto 2 a 466 m 1.4 m=26 px, lo spigolo dell'obelisco è a 624 px, e la proporzione dà 33,61 m, il 4.7% in più del calcolo con il Sole, Fontana 32.56 m, l'1.6% in più. Una misura fatta il 26/3/2007 con la lunghezza 28.5 m dell'ombra col Sole al meridiano ha dato $h=34.3$ m col Sole a $50^\circ 16'$ di altezza, anche qui senza croce e finimenti, ma con la cuspide piramidale. Fontana dà 33.56 m, ma la distanza della cuspide del monolito dalla sua ombra era di 44 m, e a quella distanza si forma una penombra di 44 cm. Con l'altezza di Fontana l'ombra dovrebbe essere lunga 27.9 m, aggiungendo la penombra (è il diametro solare di 1/100 di radiante che la produce) si ottiene 28.4 m compatibili con l'osservazione fatta a suo tempo (ref. 1). Nella misura del 4/6/2015 l'ombra si formava a circa 33 metri dallo spigolo, con una penombra di 33 cm, sottraendo 15 cm all'ombra abbiamo corretto di -45 cm l'altezza dello spigolo che l'ha formata. Il limite del metodo gnomonico sta proprio nella precisione con cui si riesce a valutare la penombra, con un contrasto molto basso, a causa della luce ambientale: questa inficia il risultato tanto più alto è il Sole (come a giugno).

Referenze C. Sigismondi, Effemeridi, APRA, Roma (2008) p.54
D. Fontana, Della Trasportatione dell'Obelisco Vaticano, 1590