

L'algebra dei transiti planetari sul Sole

Costantino Sigismondi

(ICRA/Sapienza e IIS F. Caffè, Roma)

Abstract

The periodicity of Mercury and Venus' transits is regulated by the resonances of the orbital periods of these planets with the Earth's one. A simple algebraic approach is presented for explaining the resonance of 243 years of Venus and the one of 46 years for Mercury and the transits in May and November for Mercury and June and December for Venus.

Riassunto

La periodicità dei transiti di Mercurio e di Venere è regolata dalla risonanza tra i loro periodi orbitali e quello della Terra. Un semplice modello algebrico, basato sul moto circolare uniforme aiuta a capire le risonanze di 243 anni per Venere e 46 anni per Mercurio, così come le date dei transiti di Mercurio in Maggio e Novembre e di Venere in Giugno e Dicembre.

Introduzione

I periodi orbitali (siderali) di Venere e della Terra stanno in rapporto tra loro approssimativamente come 8:13. Questo significa che le due orbite sono risonanti. Per la precisione $PT=365.25636$ giorni è il periodo siderale della Terra, mentre $PV=224.701$ giorni è quello di Venere.

Ciò significa che la Terra percorre i suoi 360° di orbita in poco più di 365 giorni e Venere in quasi 225. Le velocità angolari dei due pianeti visti dal Sole sono $\omega_T=360^\circ/365.25636d$ e $\omega_V=360^\circ/224.701d$. La velocità angolare con cui Venere supera la Terra è data dalla differenza $\Delta\omega=\omega_V-\omega_T=360^\circ(1/PV-1/PT)=0.61652^\circ/d$. Se l'orbita di Venere e quella della Terra giacessero sullo stesso piano, i due pianeti tornerebbero ad allinearsi ogni periodo sinodico PS (dal greco syn odos = stesso percorso) cioè ogni qual volta $\Delta\omega \cdot PS=360^\circ$. Questa equazione ci dà $PS=1/(1/PV-1/PT)\sim 583.92$ giorni. Sul periodo sinodico di Venere era basato il calendario dei Maya.

Poiché i piani dell'orbita dei Terra e Venere sono diversi, pur

avendo il Sole in uno dei fuochi, dopo ogni periodo sinodico è la proiezione di Venere sul piano dell'eclittica (il piano dell'orbita terrestre) che ritorna in allineamento con la Terra. In questo caso si determina solo una congiunzione inferiore. Questa diventa un transito quando Venere si trova in prossimità di uno dei due nodi dell'orbita. Si chiamano nodi gli estremi della linea generata dall'intersezione del piano dell'orbita di Venere con il piano dell'eclittica.

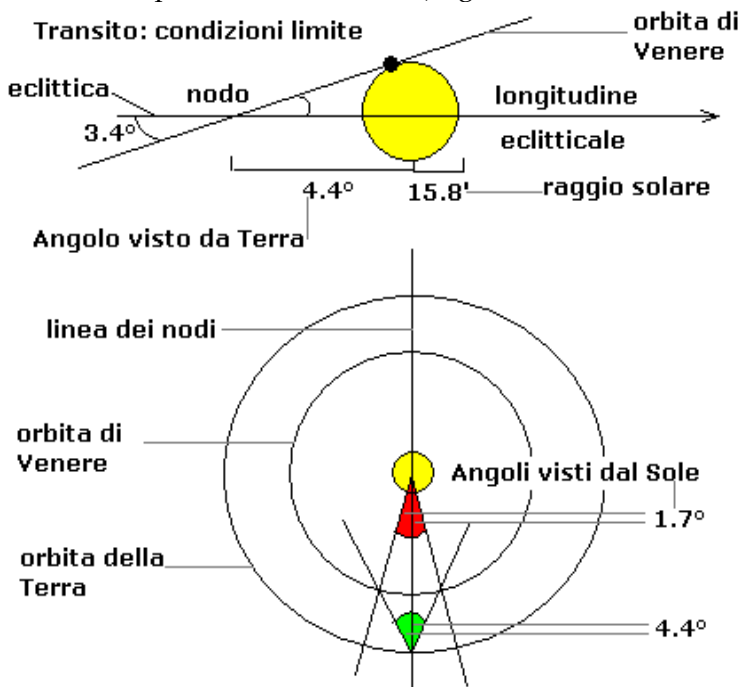
Quanto Venere deve essere prossima ai nodi dell'orbita? Dato che la sua orbita è inclinata di $i=3^{\circ}.394$ sul piano dell'eclittica, Venere può distare al massimo (sia a Est che a Ovest dal nodo) di un angolo di longitudine $\hat{J}$ tale che $\hat{J} \cdot \tan(i) \leq 15'.77$.

Il raggio solare angolare all'afelio visto da Terra ha un valore minimo di $15'.77$. L'equazione precedente ha come soluzione $\hat{J} \leq 4^{\circ}.432$, angolo visto da Terra. Siccome Venere quando è in congiunzione inferiore si trova a circa $\frac{1}{4}$ di U.A. (0.277 U.A.) dalla Terra, e a $\frac{3}{4}$ dal Sole (0.723 U.A.), sulla sua orbita quell'angolo $\hat{J}$ visto da Terra corrisponde ad un angolo $\sim \hat{J}/3$ ($0.38 \cdot \hat{J}$) visto dal Sole. Questo corrisponde a $\sim \hat{J}/(3 \cdot 360^{\circ}) \leq 0.00472$ cioè lo 0.472% del periodo siderale di Venere.

Per Mercurio vale l'equazione $\hat{J} \leq 15'.77 / \tan(7^{\circ}.004) = 2^{\circ}.139$ visti da Terra, ed essendo Mercurio più vicino al Sole che alla Terra in congiunzione inferiore, dal Sole questo angolo è 1.58 volte maggiore, cioè $\hat{J}$ corrisponde allo 0.941% della sua orbita ($PM=87.969$ d).

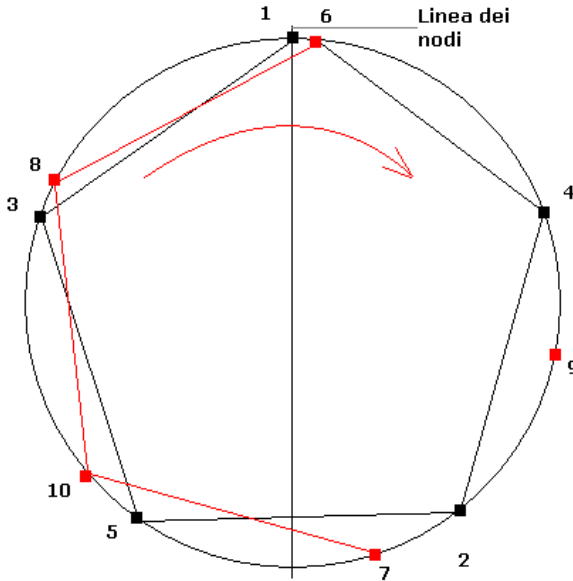
La ragione per cui i transiti di Venere sono così rari sta proprio nel fatto che il rapporto PV/PT non è esattamente uguale ad $8:13$, ma quasi. Questo "quasi" permette anche la possibilità di avere transiti anche all'altro nodo dell'orbita, facendo sì che la periodicità non sia ogni 243 anni, ma ci sia un intervallo di 121.5 anni in mezzo. Infatti se il suddetto rapporto fosse esattamente pari a $8:13$, avremmo 5 transiti (ovvero 5

congiunzioni inferiori, di cui una col transito, se teniamo conto della non complanarità delle orbite) ogni 8 anni esatti.



Già i Caldei si erano accorti che Venere mostrava un ciclo di otto anni, in capo al quale le congiunzioni inferiori tornavano a verificarsi più o meno nello stessa stagione dell'anno. Proprio grazie a questo ciclo è stato possibile datare con precisione una delle cadute di Babilonia, quella del 1499 a. C., a partire dalla quale si è ricostruita tutta la cronologia babilonese (cfr. V. G. Gurzadyan, *Sky and Telescope*, 100, 40, 2000).

Rappresentando su un disegno le configurazioni in cui ogni 1.6 anni ($1.6 = 8 / (13 - 8) = 8 / 5 = 584.41$ d) si ripete la congiunzione abbiamo che esse sarebbero disposte ai vertici di un pentagono regolare inscritto in un cerchio.



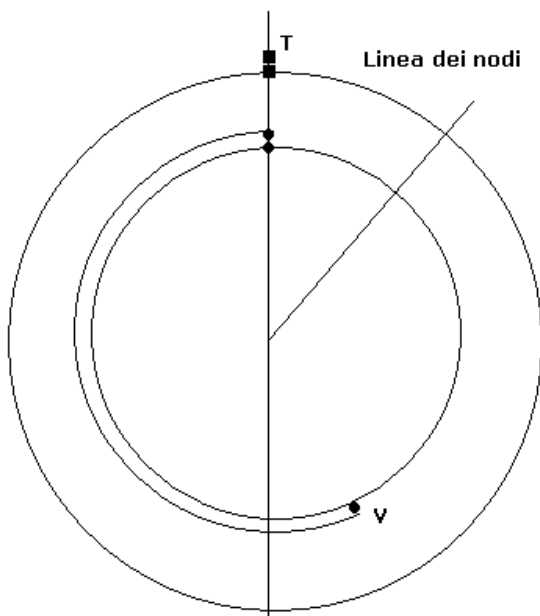
Longitudini delle congiunzioni inferiori di Venere

Il valore esatto di 1.59866 anni (583.92 d) fa sì che il pentagono non sia proprio regolare, ed il sesto punto non coincida con il primo, ma se ne discosti un poco. Così di 8 anni in 8 anni il pentagono ruota ed il vertice che coincideva con la linea dei nodi perde man mano l'allineamento, finché un altro vertice vada a finire vicino alla linea entro l'angolo di tolleranza richiesto. Questo accade dopo 121.5 anni all'altro nodo-se l'allineamento di partenza era perfetto-, mentre l'allineamento al primo nodo torna dopo 235 anni dall'ultimo allineamento. Infatti dopo 8 anni se l'allineamento di partenza era perfetto ci si trova ancora entro l'angolo di tolleranza per un transito, ma poi occorre attendere altri 235 anni per riaverlo allo stesso nodo. Questo fa sì che si consideri stabile solo il periodo di 243 anni. Lo stesso dicasi per i transiti all'altro nodo. Deduciamo ora le formule che generano questa sequenza.

Equazioni dei transiti

Dopo un anno Venere ha compiuto più di un giro della sua orbita, precisamente 1.6255217 giri ($365.25636/224.701$).

Perché si abbia di nuovo un allineamento allo stesso nodo, bisogna che passi un numero intero n di anni, e che, parimenti, anche Venere abbia percorso un numero intero di orbite.



Dopo un giro completo della Terra, Venere ne ha compiuti 1.625

Deve valere l'equazione $\text{frac}(1.6255217 \cdot n_1) \leq 0.00472$,
dove con frac si intende la parte decimale del numero, es.
 $\text{frac}(10.332) = 0.332$.

Questa equazione ci garantisce che i numeri interi n che la soddisfano sono gli anni in cui Venere si trova nei pressi del nodo della sua orbita abbastanza vicino da determinare un transito sul disco solare.

Se cerchiamo l'allineamento con il nodo opposto, che la Terra raggiunge dopo metà anno, abbiamo che Venere in metà anno ha già percorso 0.3127608 giri in più rispetto a metà giro. Dopo un anno e mezzo avrà fatto altri 1.6255217 giri e così via. L'equazione per l'altro nodo è $\text{frac}(1.6255217 \cdot n_2 + 0.3127608) \leq 0.00472$. Ad n_2 bisogna ricordarsi di aggiungere metà anno, e ciò fa sì che i transiti avvengano a coppie, separate da 121.5, 113.5 e anche 105.5 anni l'8 giugno e l'8 dicembre.

Analogamente per Mercurio abbiamo le equazioni

$$\text{frac}(4.1521031 \cdot n_1) \leq 0.00941$$

$$\text{frac}(4.1521031 \cdot n_2 + 2.0760516) \leq 0.00941$$

Anche le equazioni $1 - \text{frac}(r) \leq \%PS$ del periodo siderale contemplano i casi in cui Venere e Mercurio debbano ancora arrivare al nodo, ma ne distano abbastanza poco da poter dar luogo ad un transito.

Queste equazioni, va notato, forniscono una sequenza di transiti che inizia con un transito esattamente centrale. Possono variare alcuni intervalli se il primo transito avviene senza l'allineamento perfetto.

Il tabulato seguente mostra quali interi n soddisfano queste equazioni, e la serie dei transiti così ottenuta (n_2 dà i numeri semi interi). Chiaramente in questi calcoli sono state assunte le approssimazioni che le orbite siano circolari e percorse a velocità angolare uniforme e che la linea dei nodi sia fissa. Si noti che per Mercurio le condizioni che la linea dei nodi sia fissa e che l'orbita sia circolare sono maggiormente violate rispetto a Venere. Per Venere abbiamo che la Terra interseca il suo nodo nelle stesse date, che vanno aumentando uniformemente di un giorno ogni 111 anni. Per Mercurio l'effetto è maggiore, un giorno ogni 82 anni. Mercurio, infine, poiché ruota molto velocemente attorno al Sole ha più

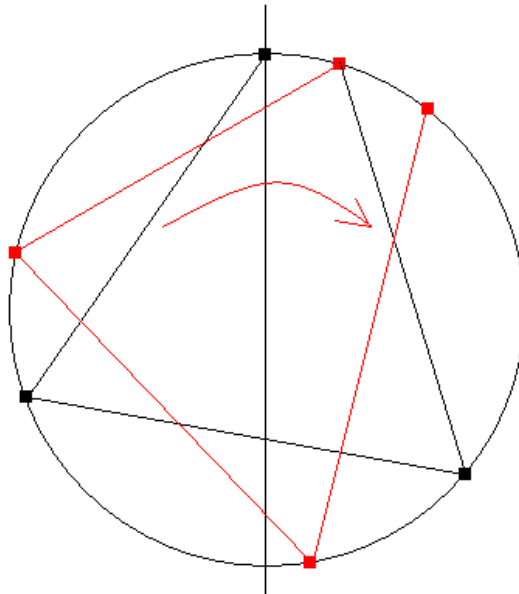
occasioni di avere congiunzioni inferiori, in media ogni 115.88 giorni.

In ogni anno ne fa perciò 3.152, disegnando un triangolo quasi equilatero inscritto nel cerchio. Il quarto vertice non si sovrappone al primo, facendo ruotare il triangolo dell'anno successivo nella direzione della progressione delle longitudini delle congiunzioni, finché non si ha il riallineamento dalla longitudine della congiunzione con i nodi.

Venere	Mercurio	599.5	309
8	39.5	607.5	348.5
113.5	46	713	355
121.5	85.5	721	394.5
235	92	834.5	401
243	131.5	842.5	440.5
356.5	177.5	956	486.5
364.5	217	964	526
478	223.5	1069.5	532.5
486	263	1077.5	572
591.5	269.5	1085.5	578.5

Periodicità dei transiti di Venere (I,III) e di Mercurio (II,IV col.) con calcoli basati sull'algoritmo algebrico nel testo.

I transiti di Mercurio sono più numerosi: questo algoritmo non trova tutti gli eventi, ma soltanto quelli in cui uno dei vertici del triangolo va in allineamento con i nodi. Considerando anche gli altri due vertici, i transiti sul Sole sono 3 volte più frequenti (12-13 per secolo). I nodi corrispondono alla posizione della Terra il 9 Novembre ed il 7 Maggio; nel 2016 la data del 9 Maggio, risente di 4 anni bisestili e relativi 29/2 dal 2003, ma la rotazione dei nodi di Mercurio porterà il transito di Maggio al 10/5 nel 2062, al 12/5 nel 2108 e al 13/5 nel 2154.



Longitudini delle congiunzioni inferiori di Mercurio

Quando Mercurio è al suo perielio (a Novembre) è molto più vicino al Sole rispetto a Maggio ed è più probabile l'allineamento con la Terra. Perciò abbiamo 3 transiti a Novembre contro 2 a Maggio.

Le sequenze dei transiti di Novembre sono ogni 7, 13, 46 anni, mentre per Maggio ogni 13 e 46 anni. 46 anni è pari a ad un numero intero di rivoluzioni di Mercurio (191) con solo 0.34 giorni di scarto, e corrisponde al Saros di Mercurio. Questa asimmetria dei transiti di Novembre e Maggio non può essere riprodotta dal nostro algoritmo, poiché qui consideriamo le orbite circolari uniformi.

Referenze

C. Sigismondi, SAROS Transiti Eclissi ed Occultazioni tra la Minerva e il Collegio Romano, Biblioteca Casantenese, 2004