

Quadrati nel medioevo, tabelle climatiche e persistenza della neve sulle montagne

Costantino Sigismondi (ICRA/Sapienza e IIS F. Caffè, Roma)

submitted April 26, 2018 accepted June 1, 2020

Abstract Gerbert did not use quadratic interpolation in compiling his climatic tables; that we apply to seasonal insolation, and snow melting on the Emilius (3559 m) North face.

Sommario Gerberto non ha usato interpolazioni quadratiche nelle sue tavole climatiche, usate per valutare l'insolazione stagionale, e la fusione della neve sulla Nord dell'Emilius.

Introduzione: le radici cristiane della scienza moderna

Il teorema di Pitagora era chiamato *pons asinorum* nel periodo storico in cui vive e opera Gerberto. Dalla geometria alla fisica è stato detto che le basi per le leggi cinematiche della caduta dei gravi siano state poste al tempo di Guglielmo d'Oresme e Giovanni Buridano all'Università di Parigi, in seguito alla spinta fornita dal Vescovo Etienne Tempier con la condanna nel 1277 di 300 tesi di Aristotele contrarie alla rivelazione cristiana. Il Cristianesimo non ha mai temuto il confronto tra la verità della scienza e quella della fede, poiché la Verità e il Bene convergono, *Ens Bonum et Verum convertuntur*. Riflettiamo sulla comprensione della matematica necessaria a capire la caduta dei gravi.

La caduta dei gravi e la proporzionalità quadratica nel medioevo

Galileo Galilei verso il 1589 si rese conto che lo spazio percorso da un grave in accelerazione (sul piano inclinato) percorre in tempi uguali spazi che crescono come i numeri dispari.

Galileo trovò che se lo spazio percorso dopo un secondo era 10 cm, dopo 2 secondi il grave aveva percorso altri 30 cm, dopo 3 secondi altri 50 cm e così via.

Spazi proporzionali ai numeri dispari $2n+1$ con $n=0, 1, 2...$ in tempi uguali, così che lo spazio complessivo al trascorrere del tempo sia pari alla sommatoria dei numeri dispari da $n=0$ ad N , cioè



1, $1+3=4$, $4+5=9$, $9+7=16$... la serie dei quadrati dei numeri interi.

La legge della velocità media

D'Oresme e Buridano, come affermava già Pierre Duhem, ripreso da Jaki, erano arrivati a formulare la legge della velocità media nella caduta dei gravi, ossia che questa aumentasse al crescere della distanza percorsa ed era pari alla metà della velocità massima.

Questa legge comporta che lo spazio cresca proporzionalmente al quadrato del tempo, ma questa deduzione la troviamo esplicita solo in Galileo. Perché?

Provo a individuare una possibile traccia nella familiarità altomedievale con le proporzioni.

L'articolo di Marek Otisk presentato al convegno Gerbertiano dell'8 maggio 2018 all'Arciconfraternita dei Siciliani, e ristampato nelle ultime 12 pagine di questo volume, mostra che Gerberto segue la scansione di Marziano Capella, basata su un adattamento, semplificazione della sinusoide, piuttosto che l'andamento lineare, apparentemente più regolare, anche perché quest'ultimo prevederebbe un cambio angoloso della velocità ai solstizi (cf. Otisk, fig. 1, verde), non naturale, *"natura non facit saltus"*.

Le tabelle climatiche a progressione uniforme

Già in Gerberto (Marek Otisk, 2018) troviamo che l'interpolazione lineare potrebbe essere utilizzata per ricavare le durate del dì durante le varie stagioni dell'anno.

Ad esempio per Roma, il cui *"clima"* corrisponde a 15/9, cioè 15 ore di luce e 9 di buio al giorno più lungo (solstizio estivo) e viceversa 15 di buio e 9 di luce al giorno più corto (solstizio invernale) Gerberto calcola la durata del giorno basandosi sulle proporzioni con il *"clima"* 18/6, dove tutti i numeri sono interi. In sei mesi la durata passa da 6 ore a 18 ore, cresce dunque di 12 ore, in media 2 ore al mese. Quindi nel primo mese dopo(/prima) il solstizio invernale la giornata dura 8 ore, nel secondo mese dopo(/prima) dura 10 ore, nel terzo mese 12 ore, nel quarto 14 e nel quinto 16.



Al “*clima di Roma*” corrispondono durate che variano di 1 ora al mese: 15 ore a giugno; 14 ore di luce a luglio/maggio; 13 ad agosto/aprile; 12 a marzo/settembre; 11 a febbraio/ottobre; 10 a gennaio/novembre e 9 a dicembre.

Gerberto sceglie di pubblicare dei dati leggermente diversi nella lettera a frate Adamo, chiamata lettera dei “*climi*” o degli “*horologia*”.

La tabella dovrebbe essere adattata ad una data del solstizio attorno al 17 dicembre/17 giugno, Gerberto avrebbe dovuto scegliere come mese più corto solo dicembre, con il minimo che cade proprio a metà mese. Il solstizio in realtà nell'anno 1000 cadeva il 17 dicembre a causa del *décalage* progressivo di 3 giorni ogni 4 secoli dell'anno Giuliano rispetto all'anno tropico a partire dal 46 a. C. in cui l'equinozio era stato fissato al 25 marzo; così che verso l'anno mille dopo 10 secoli, abbiamo un *décalage* di 8 giorni, cioè dal 25 marzo/dicembre/giugno/settembre si passa al giorno 17 di quei mesi. Però il minimo della tabella è tra dicembre e gennaio, come se il solstizio dovesse essere il 31 dicembre (Sigismondi, 2003).

Queste tabelle o *horologia*, vengono ottenuti sempre con interpolazione lineare tra le date, ossia assumendo la velocità di variazione della durata del giorno costante durante tutto l'anno. Nella realtà questo non accade.

Le tabelle climatiche di Marziano Capella e Gerberto (sinusoide)

Già Marziano Capella nel *De nuptiis Philologiae et Mercurii*, VIII riportava una distribuzione più aderente alla realtà

Interea bis climatibus quibusque crescunt decrescunt que luces, sciendum que a bruma ita dies aecrescere, ut primo mense duodecima eiusdem temporis quod additur aestate accrescat, secundo mense sexta, tertio quarta, et quarto mense alia quarta, quinto sexta, sexto duodecima.

Traduzione: tra i due solstizi la luce cresce e decresce, sapendo che dall'inverno (bruma) il giorno si accresce il primo e il sesto mese della dodicesima (parte) dell'intervallo totale che l'estate aggiunge, della sesta il secondo e il quinto mese, della quarta, sia il terzo che il quarto.

Numeri: 1/12, 1/6, 1/4, 1/4, 1/6, 1/12 delle ore che l'estate aggiunge



all'inverno. Per Roma sono 6, e gli incrementi sono 30m, 1h, 1h30m fino all'equinozio, e simmetricamente 1h 30, 1h e 30 m sino al solstizio estivo.

Una tabella basata sul quadrato: per i giorni vicini al solstizio

La velocità di variazione della durata del dì, nella realtà, si riduce a zero nei solstizi, ed è invece massima agli equinozi. Ed è qui la proporzionalità quadratica del fenomeno, almeno nell'intorno dei solstizi.

In analogia con la caduta dei gravi, la velocità media può essere considerata pari alla metà di quella massima, applicando il teorema del D'Oresme. A Roma la media è di 1 ora al mese (6 ore in 6 mesi), quindi all'equinozio deve essere di 2 ore al mese, che è la velocità massima, mentre al solstizio è zero.

Un moto proporzionale al quadrato dei tempi, espressi in mesi, presupporrebbe che a $t=0$ la velocità sia massima pari a 2h/mese, e che progressivamente essa diminuisca in modo proporzionale ai tempi, e quindi a $t=1$ mese sia $v=2-2/3$ h/mese, a $t=2$ mesi $v=2-4/3$ h/mese e a $t=3$ mesi $v=0$ h/mese; mentre le ore di luce siano 9 al solstizio invernale, $9+1/3$ dopo un mese, $9+4/3=10+1/3$ dopo 2 mesi, e $9+9/3=12$ ore dopo 3 mesi all'equinozio di Primavera, poi, simmetricamente, $12+5/3=13+2/3$ dopo un mese, $13+2/3+3/3=14+2/3$ dopo 2 mesi e 15 ore al solstizio estivo dopo tre

mese	Dicembre	Gennaio/Nov	Feb/Ott	Marzo/Sett	Aprile/Ago	Mag/Lug	Giugno
h luce	9	$9+1/3$	$10+1/3$	12	$13+2/3$	$14+2/3$	15

La tabella più corretta sarebbe con i segni zodiacali, attorno al 21 del mese

mese	Capricorno	21gen/23nov	21Feb/22ott	21Mar/23Set	21Apr/23Ago	21Mag/23Lug	Cancro
h luce	9	$9+1/3$	$10+1/3$	12	$13+2/3$	$14+2/3$	15

Tabella 1. Clima di Roma, durata del dì durante l'anno

Per il clima di Thule 18/6 avremmo velocità media 12 ore in 6 mesi, 2h/mese, massima 4h/mese

mese	Dicembre	Gennaio/Nov	Feb/Ott	Marzo/Sett	Aprile/Ago	Mag/Lug	Giugno
h luce	6	$6+2/3$	$8+2/3$	12	$15+1/3$	$17+1/3$	18

Tabella 2. Clima di Thule, durata del dì durante l'anno

L'equazione della durata del dì col tempo in mesi a partire dal solstizio



invernale per Roma sarebbe $t=9+1/3t^2$ fino all'equinozio e $t=15-1/3t^2$ partendo dal solstizio estivo all'indietro fino all'equinozio.

Per l'ultima Thule $t=6+2/3t^2$ fino all'equinozio e $t=18-2/3t^2$ partendo dal solstizio estivo all'indietro fino all'equinozio.

Ad esempio per l'11 novembre che è 40 giorni prima del solstizio invernale la durata del dì è equivalente a quella 40 giorni dopo, cioè $1+1/3$ mesi; $t=9+1/3(4/3)^2=9+16/27=9.59$ ore cioè circa 9 h 36 min -24 minuti rispetto alle effemeridi.

Da effemeridi la durata del dì risulta 10 ore esatte.

Usando l'interpolazione lineare del tempo di Gerberto la durata del dì sarebbe $9+1+1/3=10$ h 20 minuti, 20 minuti in più del valore delle effemeridi. In questo caso specifico l'interpolazione lineare funziona meglio di quella quadratica.

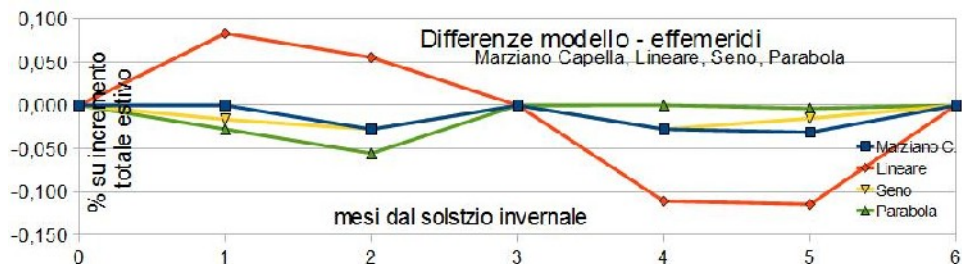


Fig. 1 Confronto tra i modelli e le effemeridi (senza rifrazione al tramonto, per cui il Sole resterebbe sopra l'orizzonte un po' di più del tempo calcolato dal modello puramente geometrico). Abbiamo situazioni quasi simmetriche prima e dopo l'equinozio. Marziano e Gerberto sono comparabili al seno, la parabola riesce anche bene, la retta scosta del 10%. L'incremento totale estivo per Roma sono 6 ore, 11%=40 minuti.

Applicazione al caso dell'illuminazione dei quattro lati di un palazzo

che corrisponde al caso di 4 marciapiedi orientati verso i 4 punti cardinali, dove si trovano delle piante. Nel caso della durata del dì con tabella lineare, la luce al lato Sud cresce da 9 ore d'inverno a 15 ore d'estate (12 se la casa affianco al marciapiede è alta), cresce in media di 6 ore in 6 mesi;



secondo la tabella dei climi proposta da Gerberto e da lui ripresa da Marziano Capella, ci sono delle variazioni. Dai lati Est e Ovest prendiamo esattamente la metà delle ore del lato Sud, mentre il lato Nord sono quelle che eccedono le 12 ore a Sud.

Facciamo il caso di Gennaio: 9 ore $\frac{1}{3}$ a Sud, 4 ore $\frac{2}{3}$ a Est e a Ovest, zero a Nord. Per Maggio abbiamo: 14 ore $\frac{2}{3}$ a Sud, 7 ore $\frac{1}{3}$ a Est e a Ovest, 2 ore $\frac{2}{3}$ di luce diretta sul lato Nord.

Naturalmente sul lato Sud, se c'è una casa alta al centro di questi quattro marciapiedi, quando il Sole "gira" oltre l'azimut dell'Ovest o è prima dell'Est, la luce non arriva più e allora il limite estivo sono 12 ore di luce, ma tutte col Sole già alto sull'orizzonte, mentre le ore al Nord sono sempre col Sole basso, abbastanza attenuato dall'assorbimento atmosferico.

Dunque la tabella dei *climi* di Gerberto sono utili per fare un calcolo dell'illuminazione solare diretta nei quattro lati di un isolato allineato con i punti cardinali. *Clima* in greco significa *inclinazione*, del Sole al solstizio.

Effetto schermo dei palazzi circostanti

Come visto per i quattro lati di un isolato, la presenza di altri edifici nelle strade circostanti determina i casi specifici di insolazione su ciascun lato. Le case davanti fungono da filtro "passa-alto" ossia che la luce del Sole quando arriva a terra o sugli alberi nei marciapiedi ha già un'inclinazione tale da avere un assorbimento atmosferico ridotto. Infatti più il Sole è alto più i suoi raggi riescono a superare gli ostacoli posti dagli edifici e toccare terra. Quindi le ore di insolazione effettiva vengono ridotte dai palazzi circostanti se sono troppo vicini, ma restano le ore a cavallo del passaggio meridiano, che sono quelle più efficienti in termini di calorie e fotoni.

Facciamo un esempio utilizzando il modello piano-parallelo di atmosfera, valido fino a 15° dall'orizzonte. La quantità di massa d'aria che deve attraversare la luce del Sole, alto h° sull'orizzonte, è pari ad $1/\sin(h^\circ)$, dove 1 è la massa d'aria che sta su di noi allo zenit. Ogni massa d'aria trasmette circa l'87% della radiazione luminosa (e termica) proveniente dal Sole. Quando il Sole è a $h=30^\circ$ l'aria trasmette l'87% dell'87% cioè il



$76\%=0.87*0.87$. Con $h=20^\circ$ le masse d'aria diventano 3 e la trasmissione totale vale il 66%. A 15° vale circa il 58%, e all'orizzonte [con 5 masse d'aria secca] passa solo il 50% di ciò che passerebbe col Sole allo zenit. La differenza tra il valore allo zenit e quello che raggiunge al meridiano alle nostre latitudini temperate (41.9° a Roma) d'estate tra primavera e autunno resta sempre nella fascia dell'80%, quindi contano le ore di insolazione col Sole così alto, piuttosto che una sua maggiore altezza.

Per esempio all'equinozio il Sole sta 12 ore nel mezzo cielo centrato a Sud, ma inizia da $h=0^\circ$ a Est e finisce con $h=0^\circ$ a Ovest, raggiungendo un'altezza di 48.9° al meridiano (Sud). Qual è la sua altezza media durante il giorno?

Gli amanti dell'interpolazione lineare direbbero 24.45° , e se fosse così avremmo 3 masse d'aria medie durante il giorno per 12 ore. C'è la possibilità di fare un'interpolazione quadratica, con una parabola rovesciata che culmina al meridiano a 49° (cifre tonde). La parabola è tale che 6, 3, 2 e 1 ora prima del meridiano, l'incremento è 36, 9, 4, 1 del totale che è 36 parti= 49° . La proporzione quadratica sarà riassunta nella tabella

h ante/post	6	5	4	3	2	1	0
h°	0	15	27	37	44	48	49
airmass	5	3,87	2,19	1,67	1,45	1,35	1,33
trasmiss. %	50	58	74	79	82	83	83

La media oraria di trasmissione sulle 12 ore è 71%, corrispondente ad una massa d'aria media di 2.46. La sommatoria delle 12 ore è 851 unità.

Se abbiamo un fenomeno "a soglia" come la fusione del ghiaccio, della neve, oppure la vegetazione delle piante, che si attivano ad es. con una sommatoria di 250 in unità %, queste unità vengono conseguite nelle tre ore a cavallo del meridiano, e le altre ore (che potrebbero anche risultare schermate dagli edifici davanti o dalle montagne davanti) contano meno.

Insolazione e innevamento sulle montagne: il caso dell'Emilius

Per la fusione di un ghiacciaio/nevaio, uno dei parametri principali è



l'insolazione. Poi l'albedo, ossia la riflettanza del ghiaccio/neve, e la sua capacità di assorbire calore da altre vie (atmosfera, rocce affioranti, sabbia depositata sopra). Per il discorso che stiamo conducendo concentriamoci sull'insolazione, e trascuriamo ostacoli davanti, per cui prendo montagne isolate come il Cervino e l'Emilius (che domina Aosta), a forma di tronco di piramide orientato con i punti cardinali. Consideriamo il lato Nord e il lato Sud. A inizio Primavera, quando sono entrambe al massimo dell'innevamento. Al lato Sud arrivano 851 unità di insolazione (le prendo tal quali dalla tabella calcolata per Roma, per comodità, anche se Aosta è a 45° N quindi ne arrivano un po' di meno). Al lato Nord ne giungono zero, iniziano ad arrivare da quel momento. Quando saranno passati tre mesi, al solstizio estivo, il lato Sud avrà ricevuto più di 851 unità ogni giorno, mentre al Nord arriveranno prima un'ora poi due poi quasi tre ma ad angoli bassi, quindi -usando la stessa tabella per non appesantire troppo con calcoli e numeri il discorso- avremo le prime tre caselle a 0°, 15° e 22°; che danno un totale di 182 unità al giorno al solstizio estivo, che decrescono via via che ci si allontana verso gli equinozi. Un giorno sul lato Sud vale circa 1000 unità d'estate, mentre uno sul lato Nord meno di 200. Se la neve sparisce in un mese sul lato Sud, a Nord necessita di 5 mesi (mantenendo la proporzione), e in capo a questo tempo può non fare in tempo a fondersi completamente... perché il Sole è troppo basso a inizio e fine stagione.

Calorie da insolazione La costante solare, circa 1370 W/m², è un valore medio dell'energia solare che arriva sull'unità di area alla distanza media Terra-Sole, fuori dall'atmosfera. Sapendo che 1 caloria innalza un grammo d'acqua di un grado di temperatura e corrisponde a 4.18 J, riscrivendo la costante solare in calorie otteniamo 328 cal/s/m². Di questa quantità l'atmosfera ne lascia passare, in media, all'equinozio (giorno scelto appositamente per avere un valore medio valido per tutto l'anno) il 71% durante tutte le 12 ore di insolazione, cioè 233 cal/s/m² su una superficie sempre perpendicolare ai raggi del Sole, come alcuni pannelli solari "a



inseguimento" riescono a fare. Le piante, grazie alle proprietà *eliotropiche* cercano il Sole, e dispongono le loro foglie in modo da massimizzare la ricezione energetica. Ammesso che il ghiaccio o la neve ricevano tutte queste calorie, e ne assorbano -a loro volta- solo il 10%, sappiamo che per fondere 1 grammo di ghiaccio servono 80 calorie, una volta che la sua temperatura sia già giunta a 0°C. Trascurando l'energia per arrivare a 0°C, e studiando solo il calore latente di fusione, di 80 cal/g, il Sole è capace di fornire in media 23 calorie al secondo per m². Per fondere un millimetro di spessore di questo ghiaccio, cioè un litro, 1000 g, servono 80000 calorie, cioè 3478 secondi, quasi un'ora.

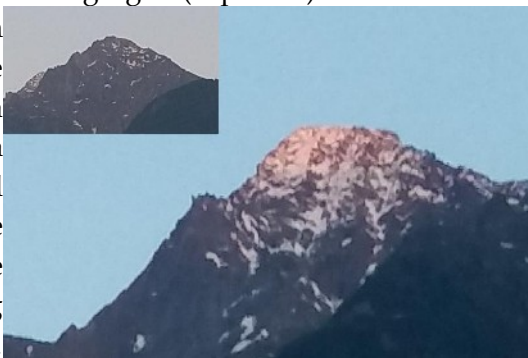
Le assunzioni utilizzate in questo modello sono: 1. il ghiaccio sia mediamente perpendicolare alla direzione di provenienza dei raggi del Sole, e 2. il suo assorbimento sia pari al 10%, e quindi l'albedo sia del 90%. Pur trattandosi di valori medi, validi per tutto l'anno, sappiamo bene che d'inverno la neve si accumula pur essendoci giornate soleggiate, e d'estate il contrario. Se applichiamo tout-court questo modello alla Groenlandia, con 2 milioni di km² di *inlandsis*, otteniamo che, durante la fase di fusione dei ghiacci, se ogni ora 1 m² produce 1 litro, tutto l'*inlandsis* (o calotta glaciale) ne produce 2 milioni. Perché ciò non accada occorrono nubi, che schermano la luce del Sole, o un'albedo del ghiaccio maggiore.

Fig. 1 l'Emilius 3559 m, visto da Aosta, al tramonto del 18 giugno 2019, con tracce di neve sulla sommità della parete Nord (sotto il lampione in prospettiva).



Fig. 2 L'Emilius al tramonto del 23 e 26 giugno (riquadro).

L'azione del Sole sulla neve in parete Nord nei tre giorni che separano le due foto ne ha modificato l'aspetto. Alla quota considerata il passaggio dal ghiaccio/neve può avvenire direttamente allo stato aeriforme con almeno $80+539=619$ calorie/g di calore latente di sublimazione.



Il calcolo completo del calore latente di sublimazione (passaggio di stato e non reazione chimica) è dato dalla somma delle entalpie di vaporizzazione e di liquefazione, e dà 679 cal/g per l'acqua. La parete Nord dell'Emilius in quei tre giorni 24, 25 e 26 giugno 2019 ha ricevuto 600 delle unità usate in tabella 1. 100 corrispondono al Sole allo zenit fuori dall'atmosfera, cioè 328 cal/s/m², quindi in 3 giorni 4 ore ogni giorno oltre le 12 ore per Aosta, fanno 12 ore di insolazione per un totale di 14 milioni di calorie per m², dividendo per 679 si ottiene circa 20 kg/m² di neve ghiacciata sparita. Lo spessore perso corrisponde (in mm) a 20 mm (se fosse acqua) 20 cm se fosse neve, e ritengo più prossimo a 20 mm il risultato essendo neve ghiacciata, ed essendo molto diverso l'aspetto della vetta a tre giorni di distanza.

Conclusioni ho mostrato come le tabelle dei climi di Gerberto, tratte da Marziano Capella, siano un'ottima approssimazione dei dati reali, e possano essere utilizzate per calcolare le ore di insolazione al variare della stagione. Ho dato l'esempio per le piante attorno ad un isolato cittadino e per la neve sulla parete nord dell'Emilius, adattando la tabella per Roma.

Referenze C. Sigismondi, *Geografia* 101, (2003) anche su arxiv

M. Otisk, [Gerbertus 11,1-12 \(2018\)](#)

