

Calcolo dell'altezza effettiva dell'ombra della Terra

K. H. Lloyd (*Australian Defence Scientific Service*)

Planetary Space Science 1968, **16**, 1071-1073

(Ricevuto il 19 Febbraio 1968)

tradotto e annotato da

C. Sigismondi (*ICRA/Sapienza e ITIS Ferraris, Roma*)

(Come Festschrift in onore della prof.ssa Carmelinda Golino)

Un metodo comune per determinare le proprietà dell'alta atmosfera è mediante il rilascio di una nube di molecole, che diffonde in modo risonante la luce del Sole, da un razzo all'imbrunire (crepuscolo).

Il Sodio (Bedinger et al. 1858; Groves, 1960) e il monossido di alluminio (Rosenberg, et. al. 1964) sono usati di frequente in questi rilasci. Quando si programmano i lanci di un tale razzo al crepuscolo, è necessario calcolare l'altezza effettiva dell'ombra della Terra,¹ così che l'ombra possa essere alla massima altezza compatibile con le richieste dell'esperimento - cioè che la diffusione della luce da parte dell'atmosfera compresa tra noi ed il razzo sia ridotta al minimo.² Questo

¹Poiché l'articolo riguarda lanci di razzi, in verticale, l'altezza dell'ombra della Terra (solida, come specificano J. Marshall e R. Alan Plumb nel loro libro *Atmosphere Ocean and Climate Dynamics*, 1961) è considerata sulla verticale di chi osserva. Un razzo lanciato dopo il tramonto, per un certo tratto della sua salita resterà in ombra e solo ad una certa quota verrà illuminato dalla luce del Sole radente l'orizzonte.

²Il cielo di giorno è azzurro perché le molecole dell'atmosfera diffondono la luce del Sole in tutte le direzioni, con migliore efficienza per la lunghezza d'onda blu. Questa diffusione è stata spiegata da Lord Rayleigh e perciò è nota come diffusione o scattering di Rayleigh. Quando le molecole dell'aria non sono colpite dalla luce solare diretta non la diffondono e consentono di vedere meglio quello che c'è dietro di loro, come le stelle per esempio o le nubi di molecole rilasciate dai razzi

articolo commenta l'esperienza di calcolo delle altezze dell'ombra, e dell'osservazione del bagliore delle nubi prodotte da granate di monossido di alluminio.

Il gruppo di ricerca sull'alta atmosfera di Rosenberg ha sviluppato un metodo semi-empirico per calcolare l'altezza effettiva dell'ombra della Terra, h in km, come funzione della depressione del Sole ε° . Il tempo al quale la depressione del Sole ha un dato valore può essere ottenuto dalle eccellenti "Tavole di Tramonto, Levata e Crepuscolo" (1962)³. L'angolo di depressione è riferito al centro del Sole; il tramonto corrisponde alla calata sotto l'orizzonte geometrico del lembo superiore del Sole. Il metodo di Rosenberg (1966) per calcolare l'altezza effettiva dell'ombra della Terra è: $h=\varepsilon^2$. Questa regola fornisce l'ombra "geometrica" in modo sorprendentemente accurato (vedi tavola 1), dove l'ombra "geometrica" è definita come l'ombra che la Terra proietterebbe se non ci fosse atmosfera.

allo scopo di studiare l'alta atmosfera. *Foreground* rispetto a *Background*=sfondo dietro, è ciò che si trova tra noi e l'oggetto osservato.

³Oggi, 2019, noi utilizziamo le effemeridi online di calsky.com, che ci dà l'altezza del lembo solare superiore, e quella del centro del Sole anche se sotto l'orizzonte visibile, oppure i dati reperibili sempre online di Stellarium web, riferiti solo al centro del Sole (ma il lembo superiore si può ottenere sottraendo il raggio solare al centro del Sole).

TABELLA 1. COMPARAZIONE TRA ALTEZZA DELL'OMBRA DELLA TERRA CALCOLATA CON METODI DIFFERENTI

Depressione del Sole ε°	Altezza dell'Ombra della Terra h [km]			
	Ombra geometrica $h = R(\sec \varepsilon - 1)$	metodo di Rosenberg $h = \varepsilon^2$ (Rosenberg)	Metodo completo che include assorbimento e rifrazione*	
			$\lambda = 450 \text{ nm}$	$\lambda = 650 \text{ nm}$
5	24	25	40	32
6	35	36	49.5	42.5
7	48	49	63	55
8	63	64	77.5	69.5
9	79	81	94	86
10	98	100	111.5	103.5
11	119	121	132	124
12	142	144	155	146.5
13	167	169	180	171
14	195	196	206	197.5

*Definiti per l'altezza a cui l'intensità della luce del Sole è ridotta al 10% con 1/4 della zona di penombra inclusa

Quando cominciammo ad interessarci nei rilasci di contaminanti al crepuscolo, ci sembrò necessario includere l'effetto di rifrazione quando calcolavamo l'altezza dell'ombra (Lloyd e Low, 1964). Trovammo che la rifrazione faceva una grande differenza sull'altezza dell'ombra, ossia, a 100 km l'altezza dell'ombra è ridotta di 25 km dal suo valore "geometrico". Comunque, come Johnson (1965) ha mostrato, l'altezza effettiva dell'ombra è sempre molti chilometri sopra l'altezza "rifratta" dell'ombra. Egli ha trovato anche che l'altezza effettiva dell'ombra per la linea del KI a 769.9 nm è più bassa di quella KI 404.4 nm. Questa osservazione immediatamente suggerisce che l'aumento nell'altezza dell'ombra sia dovuto all'assorbimento atmosferico dei raggi del Sole da parte dell'atmosfera della Terra.⁴

⁴Il calcolo della posizione dell'ombra "geometrica" viene fatto tirando una linea dal bordo superiore del Sole, tangente alla superficie della Terra dove sta tramontando in quel momento, fino nell'atmosfera che si trova nella direzione opposta al Sole. L'atmosfera stessa però assorbe i raggi luminosi, che in queste condizioni di radenza percorrono grandi distanze, e pertanto si comporta come uno schermo posto ad una certa

Al fine di calcolare l'ampiezza di questo effetto a Woomera,⁵ abbiamo determinato il coefficiente locale di assorbimento atmosferico nel continuo.⁶ Ciò è stato fatto misurando il tasso di cambio dell'intensità della luce del Sole al variare dell'angolo zenitale.⁷ Abbiamo trovato che il nostro risultato per il coefficiente di assorbimento atmosferico è in ottimo accordo con i valori pubblicati da Allen (1963), eccetto oltre i 700 nm, dove i nostri valori sono più grandi. Questo suggerisce che l'atmosfera a Woomera contenga un numero di particelle di circa $1\text{ }\mu\text{m}$ ⁸ di diametro maggiore della media. Da

altezza da terra. Quando l'ombra non è proiettata dalla Terra solida, ma dall'atmosfera ad un'altezza h_0 possiamo trovare una correzione all'altezza di intersezione [tra il raggio di luce e la verticale] calcolata noi. Chiameremo h_0 l'altezza di schermo (Vegard, 1940). Questo fenomeno di schermo da parte dell'atmosfera diventa evidente in alcuni tramonti estivi, quando l'umidità fa sparire il Sole dalla vista anche un grado sopra l'orizzonte (e.g. caso del 21 agosto 2019 su youtube). Ho calcolato che l'azione di schermo del vapor d'acqua sulla luce del Sole in quei casi è superiore a quello di trenta volte lo spessore dell'atmosfera pura allo zenit.

⁵È la zona più vasta al Mondo dedicata a test militari, la zona proibita di Woomera nel Sud dell'Australia è celebre.

⁶Lo spettro luminoso si distingue in continuo e righe di emissione/assorbimento. Quello continuo è offerto dalla luce del Sole (anche se ha le righe di assorbimento di Fraunhofer), quello di assorbimento/emissione riguarda determinate lunghezze d'onda o colori specifici e può differire anche di molto da una lunghezza d'onda all'altra. Di solito la luce di lunghezza d'onda λ tende ad essere assorbita in modo più efficiente quando incontra ostacoli di dimensione simile a λ .

⁷L'angolo zenitale è la distanza angolare dallo zenit, il punto che si trova sulla verticale dell'osservatore. L'angolo zenitale è variato lanciando razzi a diverse altezze ed osservando la luce diffusa dalle nubi di contaminanti rilasciate dalle granate in quota. Questa luce viene diffusa secondo lunghezze d'onda ben precise di cui i valori sono nel testo.

⁸ $1\text{ }\mu\text{m}$ sono 1000 nm. La lunghezza d'onda infrarossa qui considerata, $\lambda=770$ nm, viene assorbita meglio da particelle di 1000 nm. Particelle molto più piccole della propria lunghezza d'onda la luce “non le vede”, le aggira facilmente; le più grandi invece sono degli ostacoli quasi insormontabili,

questa conoscenza sul coefficiente di assorbimento dell'atmosfera della Terra, abbiamo computato la decrescita nell'intensità di un raggio che realizza un passaggio completo nell'atmosfera della Terra, come funzione dell'altezza minima h_0 del raggio luminoso rispetto alla superficie terrestre. Il limite dell'ombra effettiva è quindi arbitrariamente definito come l'altezza alla quale l'intensità della radiazione solare è diminuita di un dato fattore.⁹

Per rilasci di materiale contaminante una definizione buona è l'altezza a cui il 10% è trasmesso ad una data lunghezza d'onda. L'altezza di schermo, h_0 , che dipende dalla lunghezza d'onda, vale dunque 10-25 km.

eccetto un po' di diffrazione che consente ad una frazione minima dei fotoni di girare intorno agli ostacoli. Su youtube ho ripreso i raggi solari che subiscono la diffrazione da un ostacolo "infinito" (rispetto a λ) che è la colonna presso lo Scorpione nella Meridiana Clementina a Roma.

⁹Questa definizione tiene conto anche del fatto che l'ombra della Terra non è proprio una linea netta, ma una regione di cielo in cui l'intensità luminosa decresce rapidamente. Si stabilisce il criterio del $\frac{1}{4}$ che oggi si può applicare con una certa facilità analizzando le nostre foto digitali al cielo orientale dopo il tramonto, con un software di fotometria come IRIS.

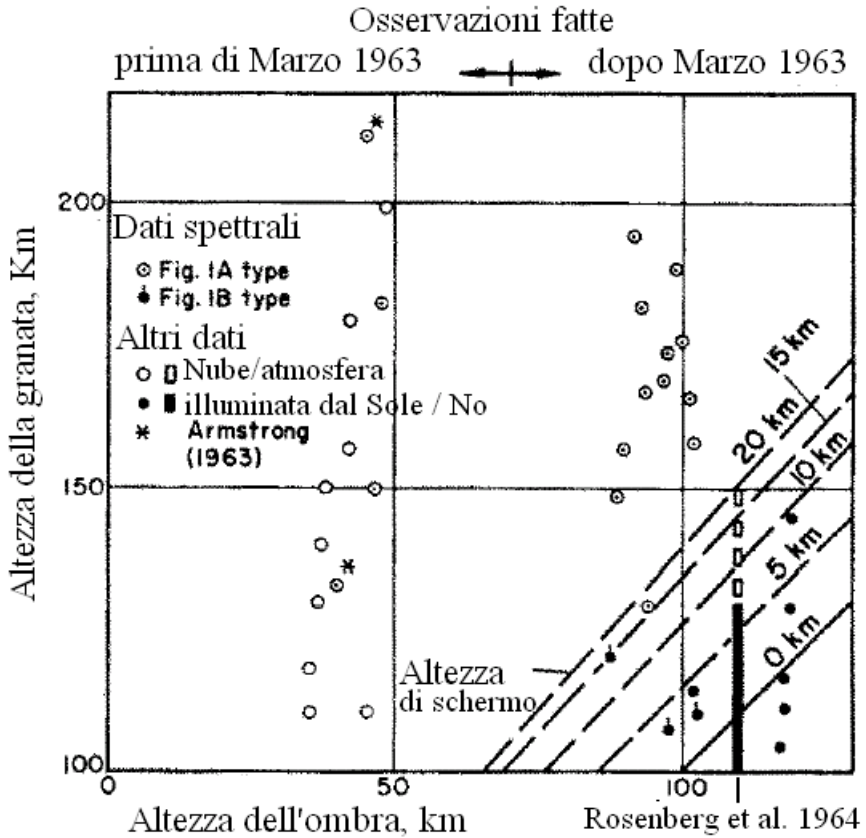


Figura 1. Altezza dello schermo¹⁰ da osservazioni a Woomera

I risultati presi da Lloyd (1967) sono confrontati con le osservazioni di Johnson (1965) nella figura 1, che differisce leggermente dalla figura 2 di Jonhson. Alla lunghezza d'onda

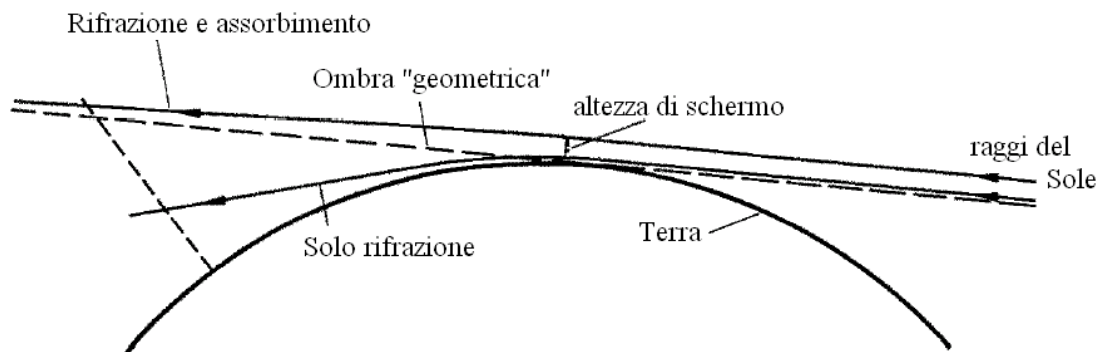
¹⁰Lanciando una granata a 100 km di quota ne vedo la nube finché l'ombra geometrica (schermo a 0 km) la copre a t_0 , oppure alzandosi lo schermo fino a 20 km, l'altezza dell'eplosione della nube di ALO deve elevarsi almeno a 130 km (dati col cerchietto col punto in mezzo e col rettangolo vuoto) per essere illuminata dal Sole nello stesso istante t_0 . A $t = t_0$ sopra i 140 km la luce del Sole arriva tutta.

delle bande dell'Ossido di Alluminio AlO , $\lambda=490$ nm, l'altezza di schermo h_0 vale circa 15-20 km,¹¹ che corrisponde al 5-20% di trasmissione della luce solare. Alla lunghezza d'onda dello Ioduro di Potassio KI, $\lambda=770$ nm, l'altezza di schermo è circa 2 km, che corrisponde a meno dell'1% di trasmissione per la luce del Sole. Le osservazioni delle nubi luminescenti che portano a questi risultati erano state fatte nell'Ottobre 1963. Sembra che l'assorbimento atmosferico nell'infrarosso fosse minore di quello ottenuto dalle nostre osservazioni, che erano di Maggio 1964 e Novembre 1964. Se il coefficiente di assorbimento a $\lambda=770$ nm si fosse ridotto di circa il 70% ad un valore leggermente inferiore a quello riportato da Allen (1963) quelle osservazioni sarebbero consistenti con il 10% di trasmissione della luce solare.

Queste osservazioni mettono in evidenza la maniera critica in cui l'altezza effettiva dell'ombra dipende dal coefficiente di assorbimento.¹²

¹¹La fluttuazione tra 15 e 20 km indica sia la variabilità intrinseca del fenomeno osservato, sia l'incertezza sperimentale di ogni misura reale. In altre parole a condizioni atmosferiche diverse può corrispondere un'altezza di schermo diversa, che nell'area Mediterranea può essere un fattore estremamente più variabile dei deserti australiani. Nell'articolo sull'altezza di schermo calcolata per le nubi nottilucenti a 82 ± 1 km di quota, osservate in Scozia, l'altezza di schermo viene valutata a 7 ± 1 km, mentre altri autori la danno a 30 km. (M. Taylor, et al., *The effect of atmospheric screening of noctilucent clouds*, J. Atmospheric and Terrestrial Physics, **46**, 363 (1984).)

¹²La presenza o meno di particolato in alta atmosfera può cambiare di molto il coefficiente di assorbimento. Inquinamento ed eruzioni vulcaniche possono modificare questi parametri su tempi scala differenti (anni, mesi, giorni). Le variazioni osservate a Woomera per l'infrarosso 770 nm possono dipendere dalle eruzioni vulcaniche che rilasciano nella stratosfera particelle micrometriche, che restano lì molto a lungo. Ad esempio l'isola di Surtsey, vulcanica, apparve proprio nel 1963.



È un errore comune pensare che il cambiamento nell'altezza effettiva dell'ombra, per differenti altezze di schermo, sia comparabile con il cambiamento nell'altezza di schermo.¹³ Ciò non è così. La percentuale di cui un raggio è rifratto diminuisce rapidamente all'aumentare dell'altezza di schermo; e l'altezza dell'ombra è aumentata corrispondentemente dalla diminuzione in rifrazione, come è per l'aumento dell'altezza radente (Lloyd, 1967).

Figura 2. Mostra come gli effetti della rifrazione e dell'assorbimento¹⁴ si annullano a vicenda.

¹³Come a dire che l'altezza dello strato schermante non influisce tantissimo sull'altezza dell'ombra, poiché la rifrazione è maggiore proprio quando lo schermo è più efficiente. Quindi la grande variabilità che abbiamo presso il mare Tirreno potrebbe non riflettersi su grandi variazioni nell'altezza dell'ombra della Terra a parità di depressione solare.

¹⁴L'effetto dell'assorbimento non fa deviare il raggio, ma lo blocca. Tutti i raggi che arrivano al di sotto dell'altezza di schermo non giungono sopra la verticale dell'osservatore che è designata dalla linea tratteggiata a sinistra in basso. La rifrazione piega i raggi in basso e quindi li porta quasi a coincidere con quelli che -senza subire alcun assorbimento- andrebbero a descrivere l'ombra "geometrica" ossia tangente alla sfera terrestre.

Avendo determinato la rifrazione e l'assorbimento dei raggi del Sole dall'atmosfera terrestre, noi possiamo calcolare l'altezza effettiva dell'ombra come funzione della depressione del Sole. Un fattore finale che deve essere incluso nel calcolare l'altezza effettiva dell'ombra è l'angolo finito che il Sole sottende alla distanza della Terra. Questo vale 32 minuti d'arco, e causa una zona di penombra che è profonda circa 10 km a 100 km di altitudine.¹⁵

Definiamo il bordo dell'ombra situato ad un quarto sopra il fondo della zona penombrale. Ciò è consistente con il criterio del 10% della radiazione trasmessa, che abbiamo usato per definire l'altezza dell'ombra in presenza di assorbimento da parte dell'atmosfera terrestre. I risultati del calcolo completo delle altezze dell'ombra per due lunghezze d'onda è dato in Tabella 1. È stato visto che l'ombra per un raggio la cui lunghezza d'onda è 450 nm si trova sopra quello di 650 nm, e che entrambi sono leggermente più alti dell'ombra "geometrica". Ci ha sorpreso che i maggiori effetti di rifrazione ed assorbimento quasi si annullano l'un l'altro, e che l'altezza dell'ombra calcolata includendo tutti questi effetti non differisca di molto dall'altezza dell'ombra "geometrica".

La figura 2 mostra come ciò accada. Notare che è solo tra 100 km e 300 km di altitudine che le altezze dell'ombra "geometrica" ed effettiva quasi coincidono. Sotto i 100 km l'ombra "geometrica" è troppo bassa, e sopra i 300 km diventa

¹⁵La penombra su uno schermo dove è proiettato il Sole è quella regione prima dell'ostacolo, dove la luce solare non arriva più da tutto il disco solare. Angularmente la penombra si estende quanto l'angolo sotteso dal Sole, che è pari a circa 1/100 di radiante (alla distanza Terra Sole di 150 milione di km, il diametro solare di 1.5 milioni di km sottende 1/100 di radiante). Dunque una penombra di 10 km presuppone un percorso di circa 1000 km dalla radenza allo strato schermante fino all'ultimo strato di atmosfera su cui è proiettata la luce del Sole.

via via troppo alta.

Una buona approssimazione ai risultati dati precedentemente può essere ottenuta modificando leggermente il metodo di Rosenberg (1966) per dare¹⁶

$$h \text{ (km)} = \varepsilon^2 \text{ (gradi}^2\text{)} + \begin{matrix} 11 & \text{per } \lambda = 450 \text{ nm} \\ 3 & \text{per } \lambda = 650 \text{ nm} \end{matrix}$$

Ringraziamenti — Sono indebitato con C. H. Low di questo Istituto, che ha giocato un ruolo chiave nello sviluppare le idee qui descritte, e con il quale le osservazioni sul coefficiente di assorbimento atmosferico sono state fatte.

Bibliografia

C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, 2nd Edition. Athlone press, University of London (1963).

J. Bedinger, E. Manring, and G. Ghosh, *Study of sodium vapour ejected into the upper atmosphere. Journal of Geophysical Research.* **63**, 19-31 (1958).

G. V. Groves, *Upper-atmosphere wind studies by Skylark rocket sodium experiment. Nature* **187**, 1001 (1960).

E. R. Johnson, *Twilight resonance radiation of AlO in the Upper Atmosphere. J. Geophys. Res.* **70**, 1275-1277 (1965).

K. H. Lloyd and C. H. Low, *Earth Shadow Computations for twilight rocket experiments. W. R. E. Tech. Note. HSA* **99** (1964).

K. H. Lloyd, *Atmospheric absorption of solar radiation, with particular reference to twilight contaminant releases. W. R. E. Tech. Note. HSA* **123** (1967).

N. W. Rosenberg, D. Golomb and E. F. Allen, *Resonance radiation of AlO from trimethylaluminum released into the upper atmosphere. J. Geophys. Res.* **69**, 1451-1452 (1964).

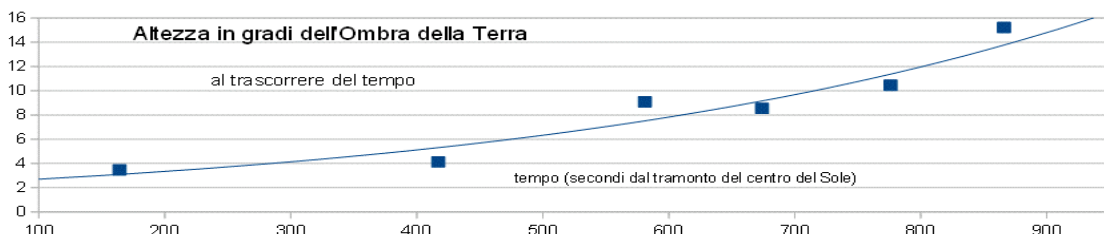
N. W. Rosenberg, Private Communication (1966).

Tables of Sunrise, Sunset and Twilight, Supplement to the American Ephemeris, Government Printing Office, Washington, D. C. (1962).

¹⁶La formula per $\lambda=450$ nm riguarda la luce azzurra, mentre per $\lambda=650$ nm quella rossa.

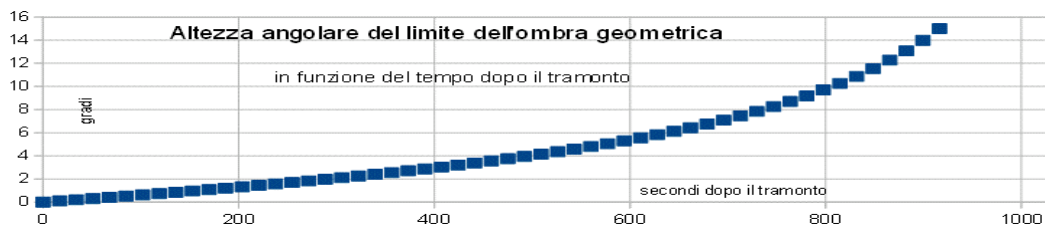
Osservazioni di altezza angolare dell'ombra della Terra da Roma dopo il tramonto dell'11 dicembre 2019

Costantino Sigismondi (ICRA/Sapienza e ITIS G. Ferraris)



Da una sequenza di foto digitali abbiamo ottenuto una tabella di altezze angolari del limite dell'ombra della Terra sopra l'orizzonte Nord-Orientale, opposto all'azimut del tramonto, in funzione del tempo in secondi, trascorso dal tramonto geometrico.¹⁷

L'altezza angolare dell'ombra può essere ridefinita usando il software IRIS per valutare dove l'intensità del cielo scende al 10%, e corretta a partire dall'altezza della Luna piena da ricavare con le effemeridi, presente nelle fotografie. Questa circostanza è particolarmente favorevole per ottenere dati accurati.



Realizzando un modello su Excel di altezza angolare dell'ombra geometrica, all'intersezione con un cerchio di

¹⁷ Le osservazioni sono state condotte dagli studenti del progetto PON di Fisica 2019-2020 "Una base per tutti" tenuto dall'11 dicembre al 29 gennaio 2020 a Roma, all'IIS F. Caffè e al lungomare di Ostia.

altezza massima k sopra la sfera terrestre al trascorrere del tempo, ho trovato che il valore del parametro $k=46$ km rappresenta bene i dati osservati, da 400 secondi a 900, senza tenere conto dell'altezza di schermo, che probabilmente determina l'angolo iniziale, che nel nostro modello è zero, mentre nei dati vale già 3.46° a 164 s dal tramonto geometrico. Per simulare l'altezza di schermo aggiungo s km al raggio terrestre di 6378 km. Con $s=10$ km $k=80$ km ho un accordo migliore con i dati. Questo modello considera l'atmosfera come una sfera riflettente a 80 km da Terra, e l'ombra prodotta da una sfera a 10 km dalla superficie: è puramente geometrico, tuttavia rende bene ragione dell'andamento angolare osservato dell'ombra della Terra che sale accelerando con il trascorrere del tempo.

Foto: la Luna alle 16:37:46 dell'11/12/19
già nell'ombra della Terra o *Venus Belt*

