

L'eccentricità ed apogeo dell'orbita della Terra misurata a Santa Maria degli Angeli nel 1703

Costantino Sigismondi (ICRA/Sapienza, Liceo G. Ferraris, Roma)

Silvia Pietroni (Università di Salerno)

Abstract Ptolemy in the *Almagest* explained the theory of the solar orbit as uniformly circular and seen from a point E different from the center O of the orbit. The segment EO=e is the eccentricity. Kepler found the ellipse with the Sun on a focus as a better orbit, and the eccentricity is the distance between the focus and the center (half of the distance between the focus). The bisection of the eccentricity meant the choice of the ellipse instead of the circle excentric. If we consider the circle as the limit of the ellipse with zero eccentricity, the points O and E are the focus and the Ptolemy's eccentricity e is just the double of the keplerian one. The measurement at the meridian line of S. Maria degli Angeli of the duration of the seasons in 1703 made by Francesco Bianchini obtained values for the eccentricity and for the apogee (the analogue of the keplerian aphelion) very close to the correct ones, the best of astronomy without telescope.

Sommario L'eccentricità e la data dell'apogeo vengono ricavate dai dati di solstizi ed equinozi misurati da Bianchini nel 1703 usando l'eccentrico di Tolomeo e confrontati con le effemeridi moderne. Anche nel 2018 l'accordo tra le effemeridi ed il fit dei dati con l'eccentrico resta entro il 4‰ e 24 ore.

Per gli ottanta anni del prof. Cosimo Palagiano, Accademico dei Lincei

Introduzione: gli eccentrici in Tolomeo

La teoria di Tolomeo sugli eccentrici è ripresa da Apollonio (IV sec a. C.). Per riprodurre il moto solare attraverso i 12 segni zodiacali, con velocità angolari differenti e conseguenti variazioni dell'equazione del tempo, Tolomeo¹ adottò la teoria del cerchio eccentrico sul quale il Sole si muove di moto uniforme. La procedura che fa Tolomeo per adattare questo modello (o *teoria*) ai dati, cioè per *salvare i fenomeni*, è un fit. Le durate delle quattro stagioni determinano sia l'eccentricità che la posizione dell'apogeo del modello. Il fit qui è tutto analitico.

L'eccentrico nella circonferenza goniometrica

Prendendo raggio $r=1$ e centro O, si prenda un punto E interno

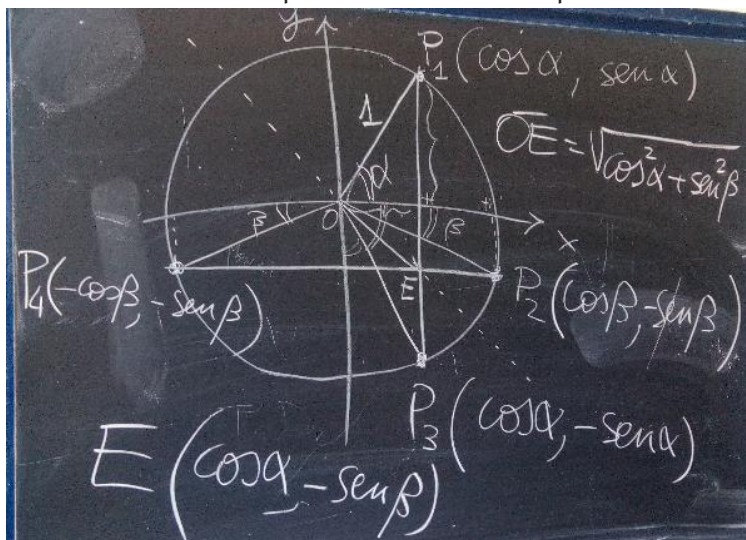
1 P. Toomer, Ptolemy's *Almagest*, Princeton 1998

alla circonferenza e vicino ad O, ad es. nel secondo quadrante. Si tracci da E una croce parallela ai due assi x ed y che interseca la circonferenza in P1, P2, P3 e P4.

Sia l'arco P1Ox= α , e l'arco P2Ox= β .

Si ottiene che le coordinate di E sono $E \equiv (\cos \alpha, -\sin \beta)$.

L'angolo spazzato dall'arco P1-P2= $\alpha+\beta$, quello da P2-P3= $\alpha-\beta$; quello da P3-P4= $180^\circ-\alpha-\beta$ e da P4-P1= $180^\circ-\alpha+\beta$.



Le durate delle stagioni sono proporzionali agli archi di circonferenza: P1-P2 alla Primavera, P2-P3 all'Estate, P3-P4 all'Autunno e P4-P1 all'Inverno. Le ultime quattro equazioni costituiscono un sistema di 4 equazioni e 2 incognite.

Sommando la prima e la seconda ottengo un'equazione in α e sottraendo la terza dalla quarta un'equazione in β .

(I) $P1-P3=2\alpha$

(II) $P4-P1-P3-P4=2\beta$

Angolo	α [d]	α [°]	β [d]	β [°]
Bianchini	93.24515	91.906788	0.239933	0.236498
IMCCE	93.246875	91.908489	0.261102	0.257443

Finalmente l'eccentricità $e = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta}$, che per Bianchini vale $e = 0.033529$, mentre per IMCCE $e = 0.033606$. Utilizziamo un calcolatore online² per la determinazione dell'eccentricità dell'orbita (kepleriana) nel 1703 basato su un'espansione in serie di potenze del tempo T sviluppata da Jean Meeus³ fino alla quinta potenza di T (in millenni dal 2000),

$$e = 0.0167086342 - 0.0004203654 * T - 0.0000126734 * T^2 + 0.0000001444 * T^3 - 0.0000000002 * T^4 + 0.0000000003 * T^5$$

così $e(\text{J. Meeus, 1703}) = 0.016832358$

Raddoppiando questo valore si ottiene $e = 0.033665$, che supera il valore ottenuto da Bianchini dello 0.4%, mentre supera quello di IMCCE dello 0.17%. Si deve notare che anche la serie del Meeus ed il risultato di IMCCE costituiscono per noi delle *teorie alternative* per descrivere l'andamento dell'eccentricità.

L'eccentricità kepleriana è ottenuta bisecando l'eccentricità tolemaica.⁴

I dati di Francesco Bianchini a Santa Maria degli Angeli

La tabella delle osservazioni fatte da Bianchini per gli equinozi ed i solstizi del 1703, il primo anno di operatività della grande meridiana di S. Maria degli Angeli è pubblicata nel suo testo,⁵ ed è anche scolpita su una lastra marmorea murata nella parete Nord del presbiterio.⁶

AM e PM sono riferiti al mezzogiorno vero e non al fuso orario dell'Europa centrale.

2 <http://www.jgiesen.de/kepler/eccentricity.html>

3 J. Meeus, *More Mathematical Astronomy Morsels*, Willmann-Bell, 1997

4 J. L. Heilbron, *The Sun in the Church*, Harvard, 1999.

5 F. Bianchini, *De Nummo et Gnomone Clementino*, Roma 1703

6 M. Catamo e C. Lucarini, *Il cielo in Basilica*, Roma 2011

Stagione	Primavera	Estate	Autunno	Inverno
Istanti osservati	21/3 h 9:03 AM	22/6 h 8:45 AM	23/9 h 9:04 PM	22/12 h 11:45 AM
Tradotti UT	21/3 h 08:20	22/6 h 07:57	23/9 h 20:06	22/12 h 10:53
Tradotti JD 2343000+	146.8472	239.83125	333.3375	422.953472
IMCCE UT	21/3 h 08:04	22/6 h 07:22	23/9 h 19:55	22/12 h 11:10
Trad. JD	146.836111	239.806944	333.329861	422.965277
Durate oss.	92.98405	93.50625	89.615972	89.136106
DurateIMCC E	92.970833	93.522917	89.635416	89.113033
IMCCE 2018	92.745139	93.656944	89.853472	88.986644

La durata dell'Inverno è la differenza con 365d 5h 49m 1.5s che è il valore dell'anno tropico ottenuto da Bianchini, mentre nelle righe IMCCE si usa il valore attuale⁷ di 365d 5h 48m 46s.

La durata media dell'anno tropico nel 1703 in accordo con un altro sviluppo in serie fino al cubo⁸ valeva: 365d 5h 48m 46.76s

La posizione dell'apogeo secondo Bianchini nel 1703

La direzione del vettore OE individua sulla circonferenza goniometrica il giorno del perigeo dalla parte del punto E e l'apogeo opposto ad E. L'apogeo è $\alpha_p = \arctan(-\sin\beta/\cos\alpha) = 7.071264^\circ$ per Bianchini e $\alpha_p = 7.683652^\circ$ per IMCCE, con la differenza tra i due di 0.61° cioè 14h 40m.

Traducendo i gradi in giorni ($360^\circ \approx 365.2422d$) e sommandoli alla data del solstizio estivo si ottiene per Bianchini 29/6 h 12:08 UT mentre per IMCCE 30/6 2:28 UT. L'apogeo secondo le

⁷ La durata dell'anno tropico varia da un anno all'altro, come si vede nel sito <https://www.timeanddate.com/astronomy/tropicalyearlength.html>

⁸ <http://scienceworld.wolfram.com/astronomy/TropicalYear.html>

effemeridi usate da www.calsky.com,⁹ al menù Sun, solstices etc., per il 1703 era 1/7 6: 33 UT (o 6:59 UT)¹⁰ 28/36 h dopo. Queste effemeridi tengono conto del fatto che a percorrere l'ellissi è il baricentro del sistema Terra-Luna, per cui può capitare che la Terra arrivi all'afelio anche con qualche giorno di differenza. Jean Meeus fornisce anche lo sviluppo in serie del tempo (dal 1900.0) riferito al baricentro del sistema Terra-Luna, che non dà “salti” fino a 3 giorni da un anno all'altro, basato sulla durata dell'anno anomalistico. La Data Giuliana JD è usata per il calcolo.¹¹

Per il 1703 l'afelio risulta il 2/7 alle 16:20 UT, tre giorni dopo il nostro risultato tolemaico sui dati di Bianchini, due sulle effemeridi IMCCE. Questa differenza è da ascrivere all'approssimazione dell'algoritmo per il 1703 a quasi 200 anni dal centro dello sviluppo, che non può tenere conto compiutamente delle variazioni di eccentricità.

Conclusioni

La teoria tolemaica dell'eccentrico è stata qui trattata analiticamente con poche e semplici formule per l'eccentricità e l'apogeo. Sono stati usati i dati di Bianchini presi alla meridiana di S. Maria degli Angeli in Roma nel 1703 che sono quanto di meglio si potesse ottenere con i mezzi osservativi del tempo. Il valore dell'eccentricità dell'orbita terrestre per Bianchini valeva $e=0.033529$ differente solo per lo 0.40% dai

9 CalSky uses for the period from 1630 to now measured values published in the Astronomical Almanac and by IERS.

10 J. Meeus, *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, Richmond, VA, USA (1999) <http://www.willbell.com/math/mc1.htm> implementate nel sito di http://www.marcomenichelli.it/perieli_afeli_terra.asp

11 Esistono convertitori online da JD a giorno, mese, anno e orario, come quello dell'IMCCE <https://promenade.imcce.fr/fr/pages2/278.html> oppure dell'AAVSO <https://www.aavso.org/jd-calculator>

modelli attuali (*teorie* anch'essi) di Jean Meeus e per lo 0.23% dal modello IMCCE, dell'Institut pour la Méchanique Céleste e pour les Éphémérides di Parigi. L'apogeo del 1703 sempre con l'eccentrico viene collocato al 29/6 e Bianchini precede IMCCE (sempre con l'eccentrico) di 14 ore, mentre le effemeridi CalSky e Meeus prevedono 1/7 h 6:33/6:59.¹² Finalmente possiamo calcolare eccentricità ed apogeo con i dati attuali IMCCE per le stagioni 2018. Viene $e=0,0333660$ e apogeo 13 d 2h 28m dopo il solstizio, cioè alle 23:35 del 4 luglio. I valori odierni per eccentricità ed apogeo sono rispettivamente 0,033402 e 4 luglio 00:22 UT (approssimazione in serie di Jean Meeus¹³), solo 23 ore prima di quanto calcolato col modello tolemaico.

$JD\text{ afelio}=2415021.546+365.2596413\cdot k+1.52E-8\cdot k^2$, dove
 $k=0.99997\cdot(\text{anno}+0.5-1900)$.

Deduciamo che l'approssimazione dell'apogeo tolemaico con l'afelio kepleriano del baricentro del sistema Terra-Luna è buona entro un giorno.

Dal 1703 al 2018 l'afelio si è spostato in avanti per effetto della "precessione climatica"¹⁴ combinazione della precessione lunisolare (degli equinozi) e della rotazione degli apsi, anche se la data varia sensibilmente da un anno all'altro per effetto dell'orbita della Terra attorno al baricentro Terra-Luna: il 2014 era il 4/7 h 0 UT, il 2015 il 6/7 h 20 UT; il 2016 il 4/7 alle 16 UT; il 2017 il 3/7 h 20 UT ed il 2018 il 6/7 alle 17 UT. Questo è un tipico effetto epicyclico.

12 Dal 1703 al 2018 la differenza tra queste 2 effemeridi si riduce da 26 a 4 minuti. Ricalcano due modelli (o teorie) leggermente differenti.

13 Jean Meeus, *Astronomical Formulae for Calculators*, Willmann-Bell, Inc. Richmond Virginia, 1982, p. 137-138.

14 <https://promenade.imcce.fr/fr/pages4/438.html#paragraphe3.2>