

Modello geometrico per interpretare le fasi del crepuscolo

Costantino Sigismondi (*ICRA/Sapienza e ITIS G. Ferraris, Roma*)

submitted May 9, 2020; accepted September 1, 2020

Introduzione *Al Calar delle Tenebre*

Ho ascoltato questa frase dopo tantissimo tempo, e mi ricordo che da piccolo mi piaceva... ma non per il motivo per cui la apprezzo adesso.

La frase descrive l'arrivo della sera, visualizzando una procedura che -abituati a vivere nella città- non vediamo facilmente.

L'ultima fase del crepuscolo, che in Inglese ha due parole diverse per l'alba *dawn* e per il tramonto *dusk*, è proprio un calare delle tenebre che inizialmente, al tramonto, salgono dall'orizzonte opposto a dove il Sole è sparito sotto forma di ombra della Terra.

Si tratta di un'ombra particolare, perché oltre alla Terra anche l'atmosfera contribuisce a quest'ombra, rendendola più sfumata dal basso verso l'alto, con una tonalità rosacea, che poi stempera nel cielo ancora azzurro.

Abbiamo scoperto che questa viene chiamata dagli Americani '*Venus Belt*', la cintura di Venere... è un linguaggio bello, ma forse ci perdiamo delle tradizioni Italiane altrettanto belle...ma che non sono arrivate a fare notizia su internet, realtà prevalentemente anglofona.

L'ombra della Terra continua a salire, man mano che la sera avanza. Abbiamo scoperto che sopra la nostra verticale, se potessimo lanciare un razzo, questo sarebbe illuminato dal Sole che si trova epsilon gradi sotto l'orizzonte, a epsilon² km di quota. E' la legge di Rosenberg, trovata su un articolo del 1968 scritto da tale LLOYD su esperimenti condotti alla base militare segreta di Woomera, in Australia.

Modello delle *tenebre decapottabili*

Siccome man mano che il Sole scende la luminosità del cielo azzurro diminuisce, diventa difficile notare che ad un certo punto l'ombra della Terra raggiunge la nostra verticale, e si estende quasi come una cappotta delle carrozze, o delle macchine decapottabili, sulle quali ti aspetteresti di vederci Grace Kelly e Cary Grant. La cappotta quanto raggiunge la verticale abbraccia l'orizzonte da destra a sinistra rispetto al punto dove ancora si vede la luce del Sole tramontato.

Poi la cappotta si chiude, ma mentre l'analogia con la carrozza ci aiuta a immaginare cosa accade, in realtà i perni della cappotta non sono più diametralmente opposti, ma si avvicinano tra loro e si stringono attorno alla luce dell'ocaso. La cappotta comincia a scendere sull'orizzonte Sud-Occidentale, come lo abbiamo visto noi¹ a fine gennaio sulla spiaggia Hakuna Matata, e meglio ancora sul Pontile di Ostia. È questo il calare delle tenebre.

Resta un oblò a forma ellittica, il cui bordo superiore si abbassa sempre più, e i laterali si stringono, mentre il bordo inferiore non coincide con l'orizzonte del mare, ma è un po' sollevato da questo.

Infatti anche il bordo inferiore sta subendo l'ombra dell'atmosfera che si trova al di là della Terra sferica, verso la direzione del Sole. Questa atmosfera produce quello che quei militari hanno chiamato screening effect.

Nei loro modelli l'effetto schermo da parte dell'atmosfera può essere anche quello di uno strato completamente opaco alto fino a 7000 metri.

¹ Con gli studenti del corso PON 2019/2020 Fisica Una Base per Tutti, il 22 gennaio 2020 a Ostia, stabilimento Hakuna Matata, al crepuscolo serale.

I raggi del Sole continuano ad illuminare l'alta atmosfera, che seppur molto rarefatta, continua a diffondere in tutte le direzioni e quindi anche verso di noi una certa luce. Quando assistiamo alle ultime fasi del crepuscolo che prende il nome di Astronomico, da un'ora a un'ora e mezzo dopo il tramonto geometrico, la luce che vediamo viene dall'alta atmosfera che si trova sulla verticale di zone ad oltre 2000 km di distanza, praticamente sull'Oceano Atlantico. Se poi sulla Spagna, e sul Mediterraneo attorno alle Baleari non ci sono nuvole, e l'aria è tersa, l'effetto schermo è minore, e la parte bassa della finestra ovale tocca quasi l'orizzonte.

Possiamo sapere come sarà il tempo nei prossimi giorni, perché le perturbazioni normalmente vengono dall'Atlantico, e se è limpido lo si capisce soprattutto dallo screening effect in basso all'ovale, prima che le tenebre calino del tutto.

I crepuscoli si chiamano

1. crepuscolo civile, e dura mezz'ora dal tramonto geometrico all'obbligo di accendere i fari (secondo il codice della strada del 1987, quando il prof. ha preso la patente, adesso i fari si accendono pure di giorno, tanto il guidatore zotico consulta il telefonino e investe lo stesso chi passa davanti, però ha i satelliti che gli coprono internet ovunque, hai capito per chi servono? Per quello che ti vuole mettere sotto...leggi qualche riga più avanti e capirai a cosa mi riferisco).
2. crepuscolo nautico da mezz'ora a un'ora. Il Sole alla fine sta tramontando 15° gradi più a Ovest, già nell'Atlantico oltre il meridiano di Greenwich. Le stelle più luminose appaiono.
3. crepuscolo astronomico fino a un'ora e mezzo dopo il tramonto. L'ultima luce del cielo ci parla del Sole in mezzo all'Oceano Atlantico 22.5° gradi da Ostia, 10° a Ovest di

Greenwich, meridiano che passa tra la parte occidentale dell'Irlanda e al largo del Marocco, tutto già sull'Oceano Atlantico. In questa ultima fase del crepuscolo appaiono via via anche le stelle più deboli.

Al loro termine è iniziata la notte.

Se la Terra non fosse sferica non potremmo vedere queste forme ellittiche degli oblò aperti sull'alta atmosfera che sta sulla verticale di orizzonti molto più a occidente del nostro.

La geometria che dobbiamo pensare per capire quanto vediamo è quella di una grande sfera, la Terra, circondata da una sfera molto vicina ad essa, l'atmosfera.

Quando il Sole tramonta, il piano che contiene noi e i suoi raggi è tangente alla Terra sferica e taglia una fetta di atmosfera sopra di noi a forma di calotta sferica.

Via via che il Sole scende sotto l'orizzonte visibile, la calotta sferica definita dai suoi raggi si inclina sempre più. E i raggi del Sole passano sempre più alti sopra di noi. Tra noi e loro c'è quella che abbiamo chiamato l'ombra della Terra, che cresce via via, con la legge di Rosenberg, e con la più poetica cintura di Venere proiettata sull'atmosfera opposta al tramonto, che è l'unica cosa che possiamo vedere non avendo razzi a disposizione.

Talvolta passa la Stazione Spaziale che ci fa capire dove inizia l'ombra della Terra... e purtroppo in queste ultime settimane capita di vedere un gran numero di satelliti... che movimentano la solennità millenaria del cielo.

Constellation X...un altro virus, difficile da eradicare.

Torniamo al nostro modello geometrico. Quando il Sole è sul meridiano 22.5° gradi dal nostro cessiamo di vedere luce ad occidente: in quel momento i suoi raggi tangenti alla Terra non colpiscono più atmosfera in grado di diffonderli... secondo Rosenberg sopra di noi passano a più di 500 km, più alti di dove orbita la ISS. Sappiamo che oltre i 100 km si parla già di spazio, e quindi noi riusciamo a vedere luce che viene da punti che sono a meno di 100 km di quota.

Facendo un'interpolazione lineare (quelli che una volta i professori di Università chiamavano "il conto della serva") cioè una proporzione si ottiene dove sta quella luce che vediamo per ultima.

Applicazioni al caso dei tramonti di Ostia

A 22.5° di distanza verso Sud Ovest... dove siamo? se fossero 360° sarebbero 40

mila Km. Proporzione e sono 2500 Km.

Facciamo ora l'approssimazione di Terra piatta, che corrisponde ad un "arrivano i nostri" se no non se ne esce dal problema, senza le ossa rotte... dalla trigonometria.

Abbiamo un triangolo rettangolo (chiudete due occhi quando guardate la figura 1, ma in fisica si procede anche così: sono stati trovati matematici che tentavano di risolvere un problema ancora dopo anni... ed avevano perso anche gli ultimi capelli bianchi).

Noi un'ora e mezzo dopo il tramonto, siamo il punto O, come osservatore.

Il punto dove avviene il tramonto in questo momento, a 2500 km da noi, è il punto T.

Altezza dell'ombra della Terra sopra di noi, punto H, a 500 km.

A che distanza da noi si trova la base del punto ad altezza

$H'=100\text{ Km}$

Risposta ad un quinto di 2500 km, dal punto T. Quindi O' a 2000 km da noi.

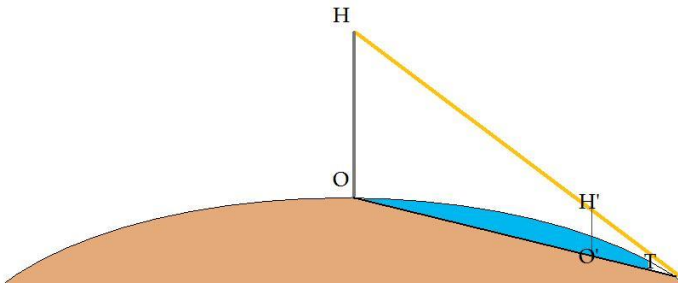


Figura 1: geometria per trovare la distanza OO' sotto l'atmosfera in H' che ci diffonde l'ultima luce del tramonto al crepuscolo astronomico.

Più o meno è giusto anche in geometria sferica...Ecco perché possiamo dire che tempo fa sulla Spagna osservando il tramonto, se non ci sono nubi.

Ecco anche perché se ci sono nubi su Sardegna o Corsica i nostri tramonti possono non terminare sul mare, così come ci è capitato proprio nelle due gite del 22 e 29 gennaio 2020. C'era un tetto di nubi, neanche troppo alto. Quelle nubi erano sul Cagliaritano.

Niente di più facile quindi di sapere che tempo fa in Sardegna o sulle Baleari, o addirittura al largo del Portogallo o del Marocco guardando le fasi finali del tramonto e dei crepuscoli, nautico e astronomico in particolare.

Naturalmente si può pensare il procedimento inverso, per ricavare l'altezza H' dell'atmosfera a partire dalle geometrie osservate delle finestre ovali che si restringono... ho preso gli orari in cui mi sembrava che il pianeta Venere, «lo bel pianeta

ch'ad amar conforta» fosse raggiunto dalla cappotta di tenebre che calavano... dati che vagamente ricordo a memoria e ho appuntato chissà dove... ma per questo metodo rischio di ritrovarmi anziano come quei matematici che cercano le soluzioni esatte...

Concedo ancora poche righe di riflessione prima di concludere:

11 marzo ore 19 Venere è al bordo dell'ovale. Non è nel punto più alto, ma facciamo finta che lo sia.

34° era l'altezza di Venere.

Il Sole era tramontato alle 18:08, 52 minuti prima. Quindi era già circa a 10° sotto l'orizzonte.

I raggi tangenti nel punto dove alle 19 stava tramontando arrivano a 34° sopra il nostro orizzonte.

OT sta a 40 mila km come 10 sta a 360°. Proporzione e OT=1111 km.

A questo punto, sempre nell'approssimazione della Terra piatta... ecco la figura, in cui ho due triangoli rettangoli, e conosco la somma dei due cateti $OO' + O'T = 1111$ km (figura 2).

Dei triangoli rettangoli ho tutti e tre gli angoli.

Quindi per i criteri di uguaglianza di due triangoli se conosco un lato e tre angoli il triangolo è univocamente determinato, quindi devo trovare il modo per risolverli, perché la soluzione c'è... e mi aspetto che venga, per il cateto in comune O'H un valore dell'ordine dei 100 km, cioè l'altezza dell'atmosfera.

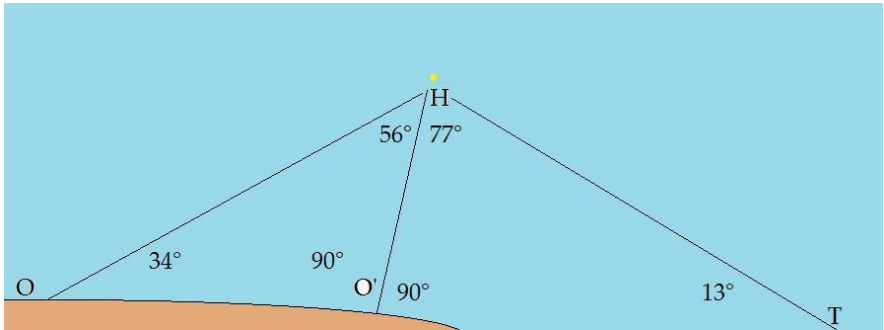


Figura 2: l'altezza dell'atmosfera misurata con l'ingresso di Venere nelle tenebre l'11 marzo alle 19 a Roma, 52 minuti dopo il tramonto.

La trigonometria ci dice che $O'H/OO' = \tan(34^\circ)$
analogamente $O'H/O'T = \tan(13^\circ)$
e poi l'altro vincolo è $OO' + O'T = 1111 \text{ km}$
che posso riscrivere $h/\tan(34^\circ) + h/\tan(13^\circ) = 1111 \text{ km}$
con $h = O'H$
così $h = 1111$
 $\text{km} / (1/\tan(34^\circ) + 1/\tan(13^\circ)) = 191 \text{ km}$

insomma viene il doppio, ma non siamo poi così lontano dal vero... solo un fattore due.

E abbiamo risolto un bel problema di trigonometria piana, con dati ricordati appena appena a memoria... ma possiamo, visto che ci siamo, rifare tutti i calcoli per 4 minuti più tardi con Venere all'incirca un grado più in basso, e anche il Sole.

così $h = 1111$
 $\text{km} / (1/\tan(33^\circ) + 1/\tan(14^\circ)) = 200 \text{ km}$
facilmente 4 minuti prima il risultato verrebbe 182 km, ma la proporzionalità inversa cambia un po' le carte in tavola, infatti
 $h = 1111 \text{ km} / (1/\tan(35^\circ) + 1/\tan(12^\circ)) = 181 \text{ km}$

Se invece delle 19 erano le 18:52, 8 minuti prima, vista la difficoltà di asseverare quell'istante di transizione risulta

$$h=1111 \text{ km}/(1/\tan(36^\circ)+1/\tan(11^\circ))=170 \text{ km}$$

Venere è 14° più a sinistra di dove, sotto l'orizzonte, sta il Sole, perciò la sua posizione non è nel punto più alto dell'oblò, che - di per sé - è più alto di 34° .

Proviamo con 38°

$$\text{così} \quad h=1111$$

$$\text{km}/(1/\tan(38^\circ)+1/\tan(13^\circ))=198 \text{ km}$$

Il risultato viene sempre il doppio di quanto mi aspetterei a senso fisico.

Per ora va bene così...questo è un modo sensato per misurare l'altezza dell'atmosfera partendo da considerazioni osservative.

Se vi ricordate il 29 gennaio abbiamo lasciato il Pontile attorno alle 18:10, le effemeridi di Stellarium danno Venere a 26° . Mi ricordo che era appena uscita dall'oblò. Era quasi finito il crepuscolo nautico, e la vostra scorta di energia...

Se fosse così, tenendo conto che il Sole era già $9^\circ 30'$ sotto l'orizzonte (sempre le effemeridi) l'equazione diventa

$$h=1055 \text{ km}/(1/\tan(26^\circ)+1/\tan(9.5^\circ))=131 \text{ km molto più}$$

accurato.

Se l'oblò avesse raggiunto Venere alle 18 il Sole era $7^\circ 41'$ sotto l'orizzonte, tramontando 854 km più lontano...così

$$h=854 \text{ km}/(1/\tan(27.6^\circ)+1/\tan(7.6^\circ))=91 \text{ km e ci siamo!}$$

La prossima volta che andiamo al mare al tramonto attrezziamoci col cibo per resistere fino alla definizione dell'ovale luminoso che si stringe via via ad occidente. Al mare si vede meglio che dalla città. Si ottengono dati più puliti, se l'orizzonte è libero.

Referenze K. H. Lloyd, Planetary Space Science 1968, 16, 1071-1073