

Penombra solare e foro stenopeico

Costantino Sigismondi (*ICRA/Sapienza and ITIS Ferraris, Roma*)

submitted April, 27 accepted September 1, 2020 sigismondi@icra.it

Abstract

The penumbra of the pinhole image in the Clementine Gnomon in the Basilica of S. Maria degli Angeli in Rome was considered as 50% of the pinhole diameter by Francesco Bianchini in 1703. The measurement done in the Basilica in 2018-2020 confirm this approach with some variability from 30% to 50%, and the experiments here described explains why with 3 mm pinhole at 5 meters ($f/d=1700$) the penumbra correction should be 30% of the pinhole diameter, while it becomes 100% at 12 meters ($f/d=4000$). The original pinhole of the Basilica was $f/d < 2500$ and nowadays it is $f/d < 2000$.

Sommario

Il problema della penombra nell'immagine solare da foro stenopeico viene affrontato mediante esperimenti di replica della formazione dell'immagine su scale più piccole, variando il rapporto tra focale e diametro del foro f/d . Risulta che per valori compresi tra 800 e 2000 come alla Meridiana di S. Maria degli Angeli l'operazione di sottrazione della penombra consiste nel sottrarre il raggio del foro stenopeico al diametro misurato dell'immagine, mentre per valori maggiori oltre 4000 occorre sottrarre l'intero diametro per ottenere il risultato. Le misure sono fatte in luce gialla $\lambda=525\pm 50$ nm, diametro del foro 3 mm e focali tra 5 metri ($f/d=1700$) e 12 metri, $f/d=4000$.

Introduzione

L'immagine del Sole osservata mediante un foro stenopeico presenta l'oscuramento al bordo (limb darkening) ma è anche un po' più grande del prodotto $D=f\cdot\theta$ poiché se in ogni punto dell'immagine arriva luce da tutte le zone del foro stenopeico, sia se lo spieghiamo con l'ottica geometrica, sia se includiamo l'ottica ondulatoria che aumenta ancora la dispersione angolare della luce, ai bordi la luce non arriva da tutta l'area del foro, ma solo da alcune parti. In questo articolo ci occupiamo dell'entità di questa zona in eccesso, chiamata penombra, perché la sua intensità luminosa decresce dando

luogo ad un effetto simile al limb darkening, ma solo geometrico.

Le prescrizioni antiche sulla costruzione delle grandi meridiane a foro stenopeico e camera oscura erano, nel 1700, che si realizzasse un rapporto altezza/diametro $h/d=1000$ e Francesco Bianchini le adottò per la Meridiana di S. Maria degli Angeli.

Nell'operazione di correzione dei dati misurati a causa dell'apertura del foro stenopeico, Bianchini adottava la sottrazione del raggio del foro stenopeico alla posizione del lembo osservato, verso l'interno dell'immagine, per correggere le misure solari prese sulla meridiana. Non tutti i suoi contemporanei erano in accordo con questa scelta (Catamo e Lucarini, 2011, p. 57), la ragione può essere proprio dovuta agli esperimenti da loro condotti su strumenti più piccoli e con rapporti focali diversi.

Eustachio Manfredi che utilizzava l'Eliometro costruito da Giandomenico Cassini nel 1655, cioè la grande meridiana nella Basilica di S. Petronio a Bologna, era d'accordo con Bianchini, proprio perché quello strumento era più grande dello *Gnomone Magno* realizzato dal Bianchini. Leonardo Ximenes, che aveva esperienza diretta dello gnomone di Paolo Toscanelli a S. Maria del Fiore, invece affermava che le condizioni meteorologiche potevano influire fino a dover sottrarre tutto il diametro o anche di più.

La correzione adottata alle grandi meridiane teneva conto della dimensione angolare del Sole, molto probabilmente nota per transiti meridiani fatti con telescopi, di cui il modello Kepleriano o quello Tolomaico con eccentricità *bisecata* (Heilbron, 1999) fornivano i valori a partire da uno noto.

La correzione della sola ottica geometrica invece è pari al diametro.

Nel caso limite di schermo addossato al foro stenopeico, infatti, il diametro dell'immagine sarebbe quello del foro, e poi allontanando lo schermo il diametro cresce proporzionalmente alla distanza.

Dunque con sole considerazioni di ottica geometrica ci si dovrebbe aspettare una correzione delle misure dell'immagine pari al diametro del foro.

Rapporto focale/diametro, e focale ideale

Il rapporto focale/diametro è già un numero adimensionale, ma per un foro stenopeico si può definire anche la focale migliore, come quella a cui l'angolo di diffrazione dal foro stesso descrive un cerchio di diametro pari al foro stenopeico stesso. In altre parole, se consideriamo il foro stenopeico come un pixel, quando il pixel è determinato dalla diffrazione quella è la distanza ideale.

In formule la diffrazione da un foro circolare di diametro d produce un angolo $\theta \approx \lambda/d$; il foro stenopeico visto dallo schermo a distanza f ha un angolo $\theta \approx d/f$ espresso in radianti, uguagliando queste due relazioni la distanza focale ideale $f \approx d^2/\lambda$.

Se consideriamo il rapporto tra focale e diametro del foro, otteniamo che questo è pari a d/λ nel caso di focale ideale, che però non è realizzata in queste grandi meridiane, perché risulterebbe troppo lunga a parità di diametro del foro. Per $\lambda=525$ nm e $d=3$ mm f/d ideale vale 5700. Per S. Maria degli Angeli con $d=20$ mm sarebbe necessario un rapporto $f/d=38000$, e cioè una focale di quasi 800 m.

Con il mutare di fattori moltiplicativi, tipo 1.22 dell'equazione di Rayleigh, oppure dei valori trovati sperimentalmente da Sigismondi (2002) non cambia l'ordine di grandezza di queste dimensioni.

L'immagine ideale è prodotta da un foro stretto a distanza grande, e richiede un buon contrasto segnale rumore, quindi una vera camera oscura. Gli esperimenti descritti in questo articolo sono stati condotti in camera oscura con diametro 3 mm e focali attorno ai 12 metri, oltre che alla Meridiana Clementina di S. Maria degli Angeli, oggi di diametro 25 mm e focale da 21 m a quasi 50 m, quindi rapporti f/d da 840 al solstizio estivo fino a 2000 a quello invernale.

La relazione tra focale e altezza del foro gnomonico, per le meridiane a foro stenopeico è, dato z l'angolo allo zenith del centro del Sole, $f=h/\cos(z)$.

A Roma z varia tra circa 65.5° al solstizio d'inverno e 18.6° a quello d'estate.

Esperimenti in camera oscura

Ho realizzato un telescopio solare stenopeico di circa 12 metri di focale raccogliendo la luce solare mediante uno specchietto piano ordinario (con due superfici riflettenti, ma il vetro riflette molto meno della parte argentata e non disturba) un foro stenopeico circolare ricavato in un bottone, il cui diametro interno è 3 mm, e un filtro giallo con banda passante centrata in $\lambda=525 \text{ nm} \pm 50 \text{ nm}$ della casa tedesca Wild, usato in fotografia e fotogrammetria.

Sono stati realizzati esperimenti anche senza filtro, per analogia col caso di s. Maria degli Angeli.

Quelli col filtro sono risultati più accurati, ma è generale la verifica che con questi parametri utilizzati la correzione al diametro dell'immagine misurata per ottenere quella da dividere per la distanza focale (foro-stenopeico-schermo) era sempre pari a 3 mm.

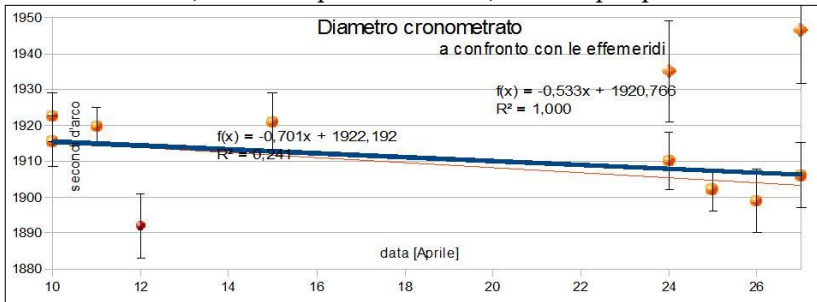


Fig. 1 La riga spessa indica il valore del diametro solare previsto. Gli ultimi quattro dati sono col filtro giallo, il 12 aprile il cielo era velato.

Il caso del pomeriggio di Pasqua, col cielo velato, riporta alle casistiche discusse dallo Ximenes, e alle molte misurate dall'autore a santa Maria degli Angeli, dove la penombra nei giorni più tersi si avvicinava al 50% del diametro del foro, mentre scendeva fino al 30% nei giorni più velati. Per tutti gli altri otto casi il diametro del foro sottratto al diametro misurato restituisce il diametro angolare vero entro una deviazione standard (rappresentata dalle barre verticali). Su distanze minori attorno ai 5 metri sono stati ripetuti gli esperimenti ottenendo risultati in disaccordo con questo andamento, ma omogenei tra loro: un diametro angolare del Sole a cui si deve

sottrarre solo mezzo diametro. I dati relativi a questa seconda serie di diametri sono i due rombi, misurati il 24 e il 27 aprile 2020.

Mentre i primi sono a $f/d \approx 4000$, gli ultimi dati sono a $f/d \approx 1700$ confrontabili, in scala, con quelli di s. Maria degli Angeli.

Per questi ultimi la correzione è stata di $1/3$ del diametro ossia 1 mm.

Conclusioni

L'esperimento a focale >12 metri si è considerato riuscito quando i diametri cronometrati su una media di almeno sei linee parallele ($D = \Delta t \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha)$ con δ la declinazione del Sole all'epoca (J2020.4) e all'istante dell'osservazione α l'angolo descritto dalla traiettoria del Sole rispetto alle righe parallele, sempre rilevato in queste misure) e diametri misurati (il dato serviva anche per calcolare α) sono risultati uguali entro le incertezze sperimentali.

Il parametro f/d ha consentito di riconoscere il caso sperimentale di focale 5 metri come analogo della meridiana Clementina e quelle a lei simili, mentre quello con focale sui 12 metri è a rapporto maggiore, $f/d > 4000$, ed è vicino al valore ideale, che per 3 mm e $\lambda = 525$ nm vale 5714. L'assenza di macchie solari sul Sole da quasi un anno impedisce di apprezzare la qualità dell'immagine stenopeica, se non dal lembo solare stesso.

Questi esperimenti hanno spiegato la differenza tra gli approcci di Cassini, Bianchini e Manfredi rispetto allo Ximenes, e ai risultati non uniformi che si riscontrano in Basilica cronometrando diametri meridiani su linee parallele.

Anche gli esperimenti qui descritti si sono valse di transiti su almeno sei linee parallele per ciascuno. Lo stesso dispositivo di linee parallele usato in Basilica è stato applicato in camera oscura, e anche la stessa telecamera.

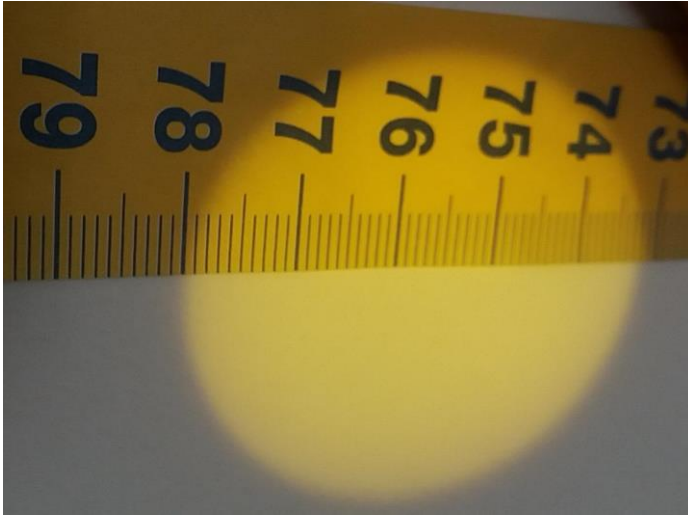


Fig. 2 L'immagine stenopeica da focale $f=5165$ mm. Queste immagini vicine sono state misurate e non cronometrate su righe parallele.

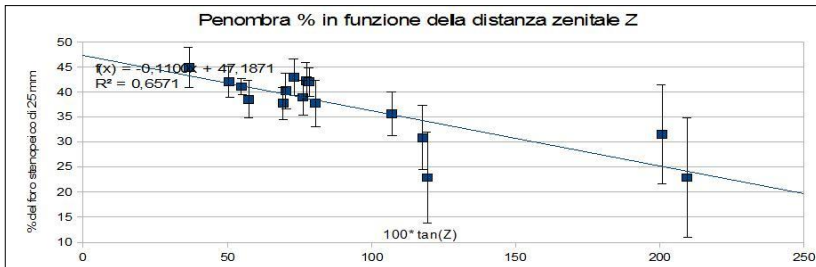


Fig. 3 La Penombra misurata in % del diametro del foro stenopeico alla Meridiana Clementina di S. Maria degli Angeli.

La percentuale tende a diminuire man mano che la distanza zenitale aumenta e con essa la focale e il rapporto f/d .

Referenze

- M. Catamo e C. Lucarini, *Il Cielo in Basilica*, Arpa Agami, Roma (2012).
J. L. Heilbron, *The Sun in the Church*, Harvard University Press, (1999).