

Il solstizio invernale nello stile di Niccolò Cusano

Costantino Sigismondi (*ICRA/Sapienza and ITIS Ferraris, Roma*)

Submitted February 9th 2020, accepted Feb 12th prof.sigismondi@icra.it

Abstract A meridian line out of the window allowed to know the date of winter solstice 2020 from six dates in November and February in which the shadow at the meridian passage was identical. The method of Niccolò Cusano to measure the winter solstice in Andraz Castle is also recalled.

Sommario Allestita una meridiana sul davanzale con un libro, un righello, una matita e un orologio, ho calcolato l'istante del solstizio invernale 2020 da sei osservazioni dell'ombra meridiana a Novembre e a Febbraio, simile a come Niccolò Cusano fece questa misura al Castello di Andraz nel 1460.

Meridiana sul davanzale La costruzione di una linea meridiana presuppone la conoscenza, per una data posizione, dell'istante del passaggio meridiano del Sole, se non si ha la possibilità di vedere il Sole da mattina a sera da quel punto, nel qual caso si può usare il metodo di Vitruvio: fissa un palo verticale e fai un cerchio centrato nella sua base, l'ombra al mattino entra nel cerchio e al pomeriggio ne esce individuando due punti, uniscili, e unisci il punto medio tra i due con la base del palo, avrai la linea meridiana. Le effemeridi per il passaggio meridiano del Sole sul mio davanzale si ottengono con Stellarium 0.20.2 con le coordinate del proprio sito, quando l'azimut del Sole vale $180^{\circ}00'00''$: quello è l'istante del transito meridiano.

A quell'istante ho tracciato con la riga e la matita una linea sull'ombra gettata dal bordo di un libro, che ho sistemato in una posizione ben precisa, ossia quando lo rimetto in quel punto quella posizione è sempre la stessa.

Osservazioni In varie giornate ho utilizzato questa meridiana, a partire dal 2 Novembre 2020 quando la ho installata, allora il transito meridiano avveniva alle 11:53. Al momento di scrivere questo articolo, prima decade di Febbraio, il transito avviene alle 12:24. La meridiana consente di apprezzare molto bene le variazioni dell'Equazione del Tempo, per cui il mezzogiorno locale in questi 100 giorni è cambiato di oltre mezz'ora. Il bordo del libro produce un'ombra che è sfumata nella penombra, rispetto all'immagine stenopeica del Sole in camera oscura (come quella della Meridiana di santa Maria degli Angeli) si tratta di un **effetto asimmetrico**.

L'obelisco (come quello di san Pietro) produce un'ombra simmetrica e questo permette una lettura più accurata sulla linea meridiana che sta sulla piazza. Quindi non dobbiamo aspettarci un risultato estremamente preciso dalle misure fatte con la "meridiana a libro" ossia che usa il libro al posto dell'obelisco, purtuttavia vedremo che la differenza tra il solstizio valutato con questa meridiana e quello con una più accurata non è molta e lo scostamento dal valore esatto dipende più dalla forma dell'orbita della Terra e la data del perielio.

Dati sperimentali

La lunghezza dell'ombra meridiana è stata presa il 3 novembre 2020, giorno di pieno Sole, pari a 443.5 mm, e poi l'8 febbraio 2021 pari a 444 mm tra una nube e l'altra. Altri dati disponibili per fare un'interpolazione lineare sono il 6 nov 461.5 mm e il 9 feb 434 mm, 11 feb 425 mm e 12 feb 419 mm. Per novembre l'ora era sempre le 11:53:45 e per febbraio le 12:24:20 perché l'istante è stazionario in quelle date.

Calcolo del solstizio invernale

È utile trasformare le date in giorni giuliani con questi calcolatori <http://www.archaeoastronomy.it/Calcolo%20JD/JD.html> online perché date col Sole alla stessa altezza meridiana le assumiamo simmetriche rispetto al solstizio (assumiamo che l'orbita sia circolare uniforme). L'algoritmo con due soli dati è la media: es. 3 Novembre e 8 Febbraio a mezzodì, danno 22 dicembre a mezzanotte. Con due dati per parte invece si può fare un'interpolazione/estrapolazione:

data	JD	ombra	JD cal	Data	JD	ombra	JD cal
3 Nov	156.95	443,5	254.03	8 Feb	253.98	444	157.04
6 Nov	159.95	461,5	252.23	9 Feb	254.98	434	155.37

Tabella 1. JD sono le ultime tre cifre del giorno giuliano. JD cal i valori calcolati (interpolati linearmente o estrapolati linearmente, cioè con le "proporzioni") perché le ombre di Nov e di Feb fossero rispettivamente uguali. I dati verdi comportano uno "spostamento dal dato osservato" minimo 0.5 mm da 443.5 a 444 mm.

Le medie incrociate di questi dati calcolati con quelli interpolati-estrapolati (verde a 2 ore di distanza, rosso a 38-42 ore di distanza)

danno 4 valori che mediati tra loro danno $JD=205.56\pm0.38$

22 dicembre ore 2:32 TMEC ± 9.2 h.

Le effemeridi di IMCCE danno il solstizio alle 11:02 TMEC del 21 dicembre 15.5 ore prima. I soli dati verdi portano al 22 dicembre ore 00:56, comunque 14 ore dopo il solstizio vero.

Discussione sui risultati Vediamo subito che la deviazione standard di tutti i dati, pari a 9 ore e 10 min, ci indicherebbe che questa è l'incertezza che abbiamo sul risultato, conseguente dall'accuratezza sui nostri dati e sul nostro strumento (che è mobile, quindi soggetto a errori casuali di calibrazione). Ma abbiamo anche il risultato esatto, che differisce dal nostro di $15.5/9.2=1.7$ cioè quasi 2 volte la deviazione standard. Significa che c'è di più di un errore casuale di lettura che ci fa ottenere un risultato diverso: quello casuale di zero.

Errore del modello: l'effetto Cusano

La risposta sta proprio nel modello che implicitamente abbiamo assunto di orbita terrestre circolare uniforme.

La Terra ruota attorno al Sole su un'orbita ellittica il cui perielio è capitato il 2 gennaio 2021 alle 14:50 TMEC, cioè dopo il solstizio d'inverno, rendendo più veloce la risalita verso le declinazioni più primaverili rispetto alla discesa.

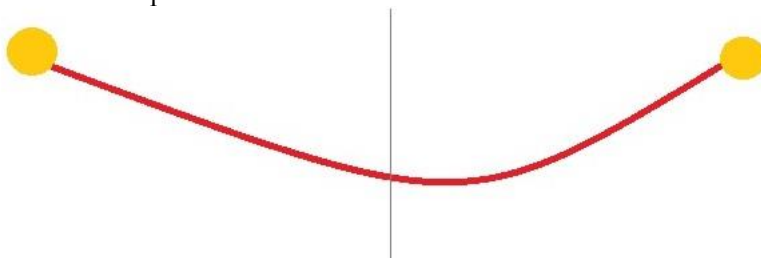


Fig. 1 Il minimo è raggiunto più lentamente mentre la stessa altezza meridiana di partenza è raggiunta più velocemente grazie al perielio. Il punto medio cade prima del vero solstizio d'inverno.

Questa differenza è sistematica e cresce con l'aumentare della distanza tra le due date estremali. Lo chiamiamo, per le considerazioni che seguono dopo, *Effetto Cusano*.

Col punto medio troviamo, invece, un istante dopo il solstizio, segno che l'errore massimo (o la deviazione standard) stimato sulla media

delle medie non tiene conto di tutte le incertezze della nostra misura. La differenza di 15 ore dal valore esatto è più realistica come incertezza del calcolo del solstizio con uno strumento così piccolo.

Teoria degli errori in Fisica

La parola errore subito presenta una connotazione morale, ma in Fisica dobbiamo intenderla più come incertezza di misura che produce un'incertezza nel risultato. Chiarito il senso non posso andare contro a secoli di utilizzo di una parola, sforzandomi di parlare di incertezze, per cui uso il termine "errore" nelle sue varie definizioni. **Errore statistico:** la deviazione standard di un insieme di dati, è computata attorno alla media, viene anche detto "momento di ordine 2" di un insieme di dati, dove quello di "ordine 1" è la media, e quello di ordine 3 lo "skew". Sono raffinatezze per cui sono state aperte delle facoltà universitarie apposta. **Errore massimo:** questo è l'approssimazione più semplice del precedente, si ottiene calcolando la semi-differenza tra valore massimo e valore minimo di una grandezza. $E_{max} = (Max - Min) / 2$. Tutti lo possono capire e calcolare.

Errore sistematico: normalmente è anche l'errore di "zero" di uno strumento, sistematicamente, cioè sempre, c'è lo stesso difetto di partenza. Una bilancia che ha lo zero starato, che "pesa" 1 kg in più...

Errore casuale di lettura: se misuro al meglio di ± 0.5 mm (**sensibilità** dello strumento) la lunghezza dell'ombra una volta posso farlo per eccesso, un'altra per difetto. È un errore casuale e l'eccesso o il difetto non dipendono da circostanze definite. Nel momento in cui le identificassimo non sarebbe più un errore casuale, ma avrebbe una causa, di cui tenere sempre conto. L'errore casuale e la sensibilità di uno strumento spesso coincidono, perché si cerca sempre di misurare con la massima precisione: es. non uso un bilancino al mg per poi arrotondare al kg. **Errore casuale meteo:** le nubi riducono il contrasto dell'ombra ed il suo limite è incerto anche di ± 2 mm.

Errore causale di zero: è il caso di introdurlo per la nostra meridiana volante: lo zero può cambiare da una misura all'altra con la posizione del libro che fa ombra. Il libro non viene incastrato esattamente allo stesso punto, ma entro ± 1 mm, non intenzionale. Si riduce creando uno strumento fisso. Niccolò Cusano lo fece, come

anche Francesco Bianchini con lo Gnomone Clementino (1702) che sta nella Basilica di s. Maria degli Angeli, le cui mura risalgono a Diocleziano (305) e non hanno più movimenti di assestamento neppure a livello del millimetro su molte decine di metri.

Confronto con dati analoghi presi allo Gnomone Clementino

I dati che ho a disposizione per lo Gnomone Clementino sono quelli ottenuti dallo studio degli ingressi nei segni del Sagittario e dell'Acquario che sono simmetrici rispetto al solstizio in Capricorno. SGR 21 nov h 21:30 AQR 19 gen h 21:40, la media tra queste due date rende il 21 dicembre alle 9:40 TMEC, 1h 22 min di anticipo sul vero solstizio. Questi dati, già interpolati, sono molto accurati e in accordo con le effemeridi, eppure hanno prodotto un risultato finale distante 82 minuti dal valore esatto, ciò lo dobbiamo solo al fatto che l'orbita della Terra è ellittica. Questi 82 minuti in anticipo sul valore vero del solstizio, misurati tra i segni del Sagittario SGR e dell'Acquario AQR sono dovuti all'*effetto Cusano*.

La combinazione *in quadratura* dei vari errori casuali porta ad un errore complessivo (lettura, zero, meteo) su una singola misura di ombra pari a $\sqrt{(1^2+1^2+2^2)}=\pm 2.5$ mm. Con l'ombra che cambia di 5.9 mm/dì queste sono $\sigma=10$ ore di incertezza per ogni misura.

La somma delle due date (Nov+Feb) ha un'incertezza $\sqrt{(\sigma^2 + \sigma^2)}=14h$ e la media, che è dividere per 2, ha 7h di incertezza calcolata. Ne abbiamo constatate circa il doppio, 14h includendo l'effetto Cusano.

Dal confronto con le effemeridi del solstizio scopriamo che la nostra meridiana volante col libro consente una precisione di una decina di ore sulla valutazione del solstizio. Comunque le medie di due date distanti 100 giorni tra loro include l'approssimazione di orbita circolare della Terra che induce ad una differenza sistematica tra solstizio vero e solstizio calcolato che cresce con la distanza tra le date delle due osservazioni.

Le interpolazioni (verde) – e soprattutto le estrapolazioni segnate in rosso- fatte su dati osservativi propagano gli errori fatte sulle singole osservazioni.

Criterio di Chauvenet, e selezione dei dati

Noi conosciamo già l'istante esatto del solstizio invernale 2020,

quindi possiamo stimare l'errore di questo metodo con questa meridiana volante a partire dal dato esatto. Ma possiamo anche vedere cosa accadrebbe selezionando i dati in basi al procedimento. Facciamo il caso dei soli dati del 3 Nov 443.5 mm e 8 Feb 444 mm: sono quasi uguali, li considero tali e ottengo 22 Dic h 0 come media, 13 ore dopo il valore esatto e circa 15 dopo l'istante che si otterrebbe da dati precisi. Passando alle interpolazioni abbiamo le ombre del 3 Nov e del 6 Nov 443.5 e 461.5 tra le quali cade, ma molto vicino al dato del 3 Nov l'ombra di 444 mm dell'8 febbraio. L'interpolazione lineare qui funziona bene perché non vado ad estendere troppo lontano dai punti di partenza il risultato. Le due medie della prima riga della tabella 1 portano come risultato $JD=204.4977\pm0.012$ che è il 22 dic h 00:56 14 ore dopo. Invece l'ombra del 9 febbraio 434 mm cade fuori dall'intervallo 443.5-461.5 ma non troppo lontano, e anche l'ombra del 6 novembre 461.5 cade fuori dall'intervallo 434-444 di febbraio. Quindi le estrapolazioni saranno da prendere con le pinze, infatti le due medie vengono 205.17 e 206.09 molto più distanti delle precedenti. Il criterio di Chauvenet, un po' "ad hoc" le scarterebbe entrambe. Applicando questo criterio resteremmo con i soli dati della prima riga, e avremmo una incertezza di 17 minuti e la data del solstizio al 22 dicembre ore 00:56, che però è più grande di 14 ore del vero. Ci troveremmo a dover spiegare come mai la differenza con il valore vero è quasi 50 volte l'incertezza del metodo... C'è un errore casuale di calibrazione e uno dovuto al meteo (che influenza il contrasto dell'ombra e quindi le sue misure) che influenzano tanto i calcoli finali. Basti pensare che 0.5 mm di differenza nella lunghezza dell'ombra spostata di 1 ora il risultato calcolo del solstizio.

Niccolò Cusano e il solstizio d'Inverno nel Castello di Andraz

Rispetto alla nostra meridiana volante il cardinale scienziato Niccolò Cusano fece un foro permanente nel muro a Sud-Sud Ovest di una stanza del Castello. Verso le 15 il Sole in una certa data di Novembre passa nel buco e illumina la parete opposta per alcuni minuti. Il fenomeno si ripete tutti i giorni fino alla data simmetrica di Febbraio. Cusano valutò l'istante del solstizio esattamente a metà tra le due date, e trovò 12-13 dicembre, perché all'epoca (1460) mancavano

ancora 122 anni alla riforma Gregoriana, che lo riportò al 21 dicembre.

Probabilmente Cusano trovò proprio il solstizio il 12 dicembre, per l'effetto che porta il suo nome, in luogo del 13. La misura, che è stata ipotizzata da Giuseppe De Donà nel 2010, non fu mai pubblicata da Cusano per la sua morte avvenuta a Todi nel 1464, durante uno dei suoi numerosi viaggi, ma l'ipotesi che quel foro avesse questo scopo è estremamente realistica.

Il cammino verso la riforma del calendario era ancora lungo. Sisto IV chiamò a Roma il Regiomontano, valente astronomo tedesco, proprio per la riforma del Calendario, ma Johannes Mueller vi trovò la morte il 6 luglio 1476 a soli 40 anni, un secolo intero prima della riforma...

Il solstizio invernale del tempo di Cusano cadeva proprio nella data del proverbio "Santa Lucia, il giorno più corto che ci sia" che ancora è conosciuto, ma che ha origine (e pure termine) circa seicento anni fa, quando viveva Cusano (Nicolaus de Kues, Nicola di Cusa, città tedesca sulla Mosella 150 km a Sud di Colonia).

Scheda Esperimento: Materiale: libro, riga, matita, orologio, Sole. Dati: data (giorno mese anno ora minuto secondo) e lunghezza ombra (mm) Algoritmi da usare: interpolazione ed estrapolazione lineare Modelli: orbita circolare della Terra attorno al Sole Incertezze di misura: ombra (± 1 mm) Data (± 1 s) Risultati dell'esperimento: Solstizio (+15.5 ore) Eccentricità dell'Orbita Terrestre (da valutare)



Fig. 2 Tomba di Niccolò Cusano (1401-1461) nella Basilica di san Pietro in Vincoli a Roma. A sinistra il Cardinale inginocchiato e con il cappello cardinalizio a terra, prega san Pietro con le chiavi e la catena conservata in quella chiesa, sorretta da un angelo.

Versione semplificata per excel: "data" al posto del giorno giuliano

Il Giorno Giuliano proposto nel 1582 da Giuseppe Scaligero al tempo della riforma Gregoriana è contato dal primo "zero" dei multipli di 15, 19 e 28 anni. 15 è l'indizione e la troviamo nelle date antiche, anche nell'epitaffio di Gerberto in Laterano (anno 1003 indizione I). 19 è il ciclo di Metone in capo al quale la Luna torna nella stessa fase lo stesso giorno dell'anno. 28 anni è il ciclo per cui lo stesso giorno della settimana è certamente nella stessa data. Questi ultimi due cicli legati alla data dell'anno funzionano sempre nel calendario Giuliano, mentre levando 3 anni bisestili ogni 400 anni la riforma Gregoriana li rende imprecisi. Noi che viviamo a cavallo del 2000 non ci accorgiamo della riforma Gregoriana perché il 2000 è stato bisestile, mentre non sono bisestili tutti gli anni secolari non divisibili per 400. Nella tabella 1 ho preso solo le ultime 3 cifre della data Giuliana JD,

ma con excel, molto più prosaicamente si usa la funzione data che trasforma la data nel numero dei giorni trascorsi dallo zero (!) gennaio 1900=0. Secondo excel è esistito il 29 febbraio 1900, e sarebbe la data 60... a parte questo errore storico, per lo scopo che ci serve excel va bene. Scrivo la data e ottengo un numero. Faccio la media tra due date come se fossero numeri... per excel il ventesimo secolo è durato 36525 giorni (valore per il 31/12/1999). Nella figura che segue c'è la trasformazione di date e in numeri dal 1900.0 (tolto 44000) e le lunghezze delle ombre.

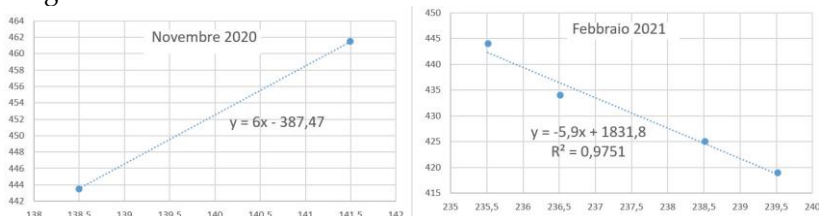


Fig. 3 La velocità di crescita dell'ombra a Novembre e Febbraio vale tra 5.9 e 6 mm/dì, il coefficiente angolare delle rette di fit.

Prendendo lo scarto massimo tra la retta di fit di Febbraio e i singoli punti abbiamo l'ampiezza delle errore casuale ± 1.5 mm sulla misurazione della lunghezza dell'ombra dalla base (un po' mobile) del libro. Conoscendo la velocità giornaliera di 6 mm/dì questo errore casuale corrisponde a ± 6 h.

Somma in quadratura degli errori

Lo stesso errore, essendo lo stesso esperimento, è capitato anche a Novembre, dove però ho solo due dati. Quindi abbiamo ± 1.5 mm a Novembre e ± 1.5 mm a Febbraio, o anche ± 6 h in entrambi i lati. Qual è l'effetto combinato delle due incertezze causali? Si sommano in quadratura così $\sqrt{(6^2+6^2)}=8.5$ h: la somma tra i due istanti è definita con un'incertezza di ± 8.5 h, e la media quindi di ± 4.25 h, perché divido per due la somma e anche l'errore.

Conclusioni

L'effetto Cusano nei nostri dati non si è visto, ma grazie alla sua conoscenza abbiamo approfondito la questione degli errori di misura, arrivando a capire che l'errore casuale sulla determinazione del Solstizio da due misure con cielo sereno è anche di ± 4.25 h, e

diventa superiore se la giornata non è serena, perché il cielo diventa più luminoso e tende a rendere più difficoltosa e difettosa l'identificazione del bordo dell'ombra.

Quindi il primo risultato, quello della media tra 3 Nov e 8 Feb entrambi a mezzodì, che dà 22 Dic a mezzanotte, è affetto da un errore casuale di circa 12 ore, dovuto sia alle diverse posizioni di zero dello strumento, sia alle diverse condizioni atmosferiche.

Questo procedimento per calibrare bene la meridiana volante a libro, lo potremo applicare per una meridiana esterna permanente sul campo di calcetto, o addirittura per le letture alla meridiana di piazza s. Pietro con l'obelisco Vaticano.



Fig. 4 il libro è sostituito dalla palestra del Liceo Morgani, il davanzale dal campo di calcetto dell'ITIS Galileo Ferraris a Roma. Foto post meridiano del 12 febbraio 2021 con la linea meridiana simulata.



Fig. 5 Lo spigolo della Palestra del Morgagni è lo gnomone, e la sua ombra descrive un'iperbole sul campo di calcetto. Questa foto è al passaggio meridiano del 15 Febbraio 2021.



Fig. 6 Gli studenti alle prese con le misure antimeridiane il 15/2.



Fig. 7 Percorso dell'ombra ogni quarto d'ora: si verifica il rallentamento progressivo della velocità dell'ombra.

Referenze

- G. De Donà, Gerbertus 1, 251 (2010)
- C. Sigismondi, [Filmati Una meridiana sul davanzale \(2 Nov 2020\)](#)
- C. Sigismondi, [Filmato del Transito del 3 novembre 2020](#)
- C. Sigismondi, [Filmato del Transito del 6 novembre 2020](#)
- C. Sigismondi, [Filmato del Transito dell' 8 febbraio 2021](#)
- C. Sigismondi, [Filmato del Transito del 9 febbraio 2021](#)
- C. Sigismondi, [Filmato del Transito dell'11 febbraio 2021](#)
- C. Sigismondi, [Foto del transito del 12 febbraio 2021](#)